

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

## **СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ**

*Допущено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов заочной формы обучения  
химико-технологических и инженерно-технических специальностей  
учреждений, обеспечивающих получение высшего образования*

Минск 2006

УДК 53 (076.6)  
ББК 22.3  
С 23

Авторы:

*О. Г. Бобрович, Д. В. Клеицкий,  
В. Р. Мадьяров, В. В. Тульев, И. И. Наркевич*

Рецензенты:

заведующий кафедрой физики БГУИР  
профессор *Н. Т. Квасов*;  
профессор кафедры теоретической физики БГУ  
*Л. М. Барковский*

**Сборник задач для контрольных работ по физике :**  
С 23 учеб. пособие для студентов химико-технологических и инженерно-  
технических специальностей заочной формы обучения /  
О. Г. Бобрович и [др.]. – Мн. : БГТУ, 2006. – 199 с.

ISBN 985-434-563-7

В пособии, написанном в соответствии с действующими учебными программами, приведены необходимые для решения задач формулы, законы и уравнения по всем разделам физики, даны примеры решения и оформления задач по основным темам теоретического курса и приведено 500 задач для составления заданий к пяти контрольным работам, предусмотренным учебным планом.

УДК 53 (076.6)  
ББК 22.3

ISBN 985-434-563-7

© Учреждение образования  
«Белорусский государственный  
технологический университет», 2006

Учебное издание

**Бобрович** Олег Георгиевич,  
**Кленицкий** Дмитрий Викентьевич,  
**Мадьяров** Владимир Рафкатович,  
**Тульев** Валентин Валентинович,  
**Наркевич** Иван Иванович

**СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ  
РАБОТ ПО ФИЗИКЕ**

Учебное пособие

Компьютерный набор и верстка  
*Хвалей О. В., Борисова О. Г.*

Редактор *Е. И. Гоман*

Подписано в печать 23.01.2006. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .  
Тираж 800 экз. Заказ

Учреждение образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13а. Лицензия ЛВ № 276 от 15.04.03.

Отпечатано в лаборатории полиграфии учреждения образования  
«Белорусский государственный технологический университет».  
220050. Минск, Свердлова, 13.



# ВВЕДЕНИЕ

## Общие рекомендации для организации самостоятельной работы по курсу «Физика»

Процесс изучения курса физики студентами-заочниками делится на два этапа.

*Первый этап* (основной) включает прослушивание установочных лекций и самостоятельное изучение программного материала физики с помощью рекомендованной литературы, а также выполнение контрольных работ и получение по ним допуска к собеседованию; *второй этап* связан с участием студентов в лабораторно-экзаменационной сессии, во время которой выполняются и сдаются лабораторные работы, проводится собеседование по контрольным работам, сдаются зачеты или экзамены.

Необходимо последовательно осваивать курс физики, руководствуясь учебной программой, которая приведена в соответствующих разделах этого пособия для химико-технологических и инженерно-технических специальностей. Нельзя ограничиваться изучением лишь тех вопросов, которые непосредственно связаны с решением задач, включенных в контрольные работы.

Самостоятельная работа студента-заочника при освоении программного теоретического материала по рекомендованной или другой литературе должна сопровождаться составлением конспекта, в котором кратко описываются физические явления, записываются формулировки законов и формулы, выражающие эти законы, а также определения физических величин и их единицы измерения, прорабатываются приведенные в пособиях примеры решения типовых задач.

При необходимости студент может получить консультацию на кафедре физики. Если нет возможности приехать в университет, следует обратиться на кафедру за получением письменной консультации, указав характер возникших затруднений (при изучении учебного материала или выполнении контрольных работ), а после внедрения дистанционного обучения консультацию можно будет получить через Интернет.

## **Правила выбора вариантов заданий для контрольных работ, их выполнения и оформления**

1. *Вариант заданий* определяется по *последней цифре* шифра зачетной книжки студента, а соответствующие *наборы из 8 задач* выбираются по таблицам, помещенным в начале пятого раздела каждой контрольной работы.

2. Контрольные работы высылаются на рецензирование в соответствии с графиком их выполнения. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради, на обложке которой нужно приклеить стандартный заполненный бланк, где указать номер контрольной работы, вариант задания, название дисциплины, фамилию и инициалы, специальность, курс, шифр, дату сдачи контрольной работы в заочный деканат.

3. Контрольные работы выполняются чернилами черного, синего или фиолетового цвета. Задачи контрольной работы должны иметь те же номера, которые они имеют в этом учебном пособии. Условие каждой задачи необходимо записывать полностью на новой странице. Для замечаний рецензента следует оставлять поля шириной 4–5 см.

4. Решение задачи начинается с *составления краткого условия* с использованием обозначений, принятых в данном пособии. Значения всех заданных величин должны быть выражены в единицах СИ и выписаны их числовые значения в виде столбика в кратком условии задачи. Идея решения задачи должна быть кратко обоснована с применением соответствующих законов, определений и положений физики. На используемые уравнения, формулы и соотношения, приведенные в этом пособии, нужно ссылаться с указанием их номеров. Величины, входящие в используемые формулы, должны быть пояснены. Ход решения задач следует пояснять с помощью схем или рисунков, выполненных карандашом при помощи линейки и других чертежных инструментов. Обозначения на чертеже и в тексте решения задачи должны иметь одинаковый вид.

5. Как правило, задачи следует решать в общем виде, т. е. в буквенном выражении, без вычисления промежуточных величин. Числовые значения подставляются только в окончательную (расчетную) формулу, определяющую искомую величину. Если эта формула не является выражением физического закона, то ее следует вывести на основе соответствующих теоретических сведений. После

получения расчетной формулы необходимо ее проверить. Для этого нужно в эту формулу вместо символов физических величин подставить обозначения их единиц в СИ и убедиться, совпадают ли единицы левой и правой частей формулы. И только после этого подставить в расчетную формулу числовые значения величин и провести вычисления.

6. В конце каждой работы необходимо разместить список использованной литературы, указывая ее авторов, место и год издания. Это позволит рецензенту при необходимости дать рекомендации со ссылкой на конкретные страницы использованной Вами литературы.

7. Если несмотря на приложенные усилия и полученные консультации какие-то отдельные задачи решить не удастся, нужно оформить работу и привести варианты решения таких задач в соответствующих местах тетради, попутно коротко изложив свои соображения и возникшие затруднения. Пусть такая работа и не будет принята с первого раза, однако рекомендации рецензента, его пояснения и ссылки на нужные места в учебной литературе помогут Вам найти правильное решение при повторной доработке первого варианта контрольной работы.

8. Не следует направлять на рецензию две или более контрольные работы вместе, необходимо завершить работу над первой и, выслав ее на рецензию, приступить к выполнению следующей. *Одновременная высылка двух и более контрольных работ в конце межсессионного периода расценивается как нарушение графика учебного процесса*, что может повлечь за собой *увеличение сроков проверки* таких работ и, соответственно, изменение сроков их защиты (собеседования) и сдачи зачета и (или) экзамена.

9. Получив проверенную работу, студент обязан тщательно изучить все замечания рецензента, уяснить свои ошибки и внести исправления. Исправления приводятся в конце контрольной – в работе над ошибками. Если решение задачи требует серьезных доработок, то в работе над ошибками ее следует оформить полностью. Повторно оформленная работа, выполненная в новой тетради, высылается на рецензию обязательно вместе с той тетрадью, в которой была выполнена ранее незачтенная. Замечания и рекомендации, сделанные рецензентом в работе, которая допущена к собеседованию, следует рассматривать как руководство при подготовке к будущему

собеседованию по решениям задач (во время лабораторно-экзаменационной сессии).

10. Во время лабораторно-экзаменационной сессии при собеседовании Вам предложат пояснить ход решений задач, входящих в контрольные работы, а также физический смысл встречающихся в решениях задач физических величин и применяемых при вычислениях единиц и т. п. *Неудовлетворительные ответы на вопросы по контрольным работам потребуют повторного собеседования с изменением сроков сдачи зачета и (или) экзамена.*

*Все тетради с контрольными работами нужно сохранять, т. к. на экзамен студент допускается только при их предъявлении.*



## Фундаментальные физические постоянные

Постоянная	Обозначение	Числовое значение
Гравитационная постоянная	$\gamma$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Атомная единица массы	а. е. м.	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R$	$8,314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Объем моля идеального газа при нормальных условиях ( $p = 1 \text{ атм}$ , $T_0 = 273,15 \text{ К}$ )	$V_m$	$22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2)$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$
Постоянная Планка	$h = 2\pi\hbar$	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса покоя электрона	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 5,486 \cdot 10^{-4} \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	$0,511 \text{ МэВ}$
Масса покоя протона	$m_p$	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,007 \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	$938,3 \text{ МэВ}$
Масса покоя нейтрона	$m_n$	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,009 \text{ а. е. м.}$
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	$939,6 \text{ МэВ}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p / m_e$	$1836,2$
Заряд электрона (абсолютная величина)	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Отношение заряда электрона к его массе	$e / m_e$	$1,759 \cdot 10^{11} \text{ Кл} \cdot \text{кг}^{-1}$

Постоянная	Обозначение	Числовое значение
Магнетон Бора	$\mu_B$	$9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Ядерный магнетон	$\mu_{\text{я}}$	$5,051 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Магнитный момент нейтрона в ядерных магнетонах	$m_n / \mu_{\text{я}}$	1,913
Магнитный момент протона в ядерных магнетонах	$m_p / \mu_{\text{я}}$	2,793
Постоянная Фарадея	$F = eN_A$	$96\,484,56 \text{ Кл} \cdot \text{моль}^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a_0$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Ридберга	$R_{\infty}$	$10\,973\,731,77 \text{ м}^{-1}$
Постоянная Стефана – Больц- мана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^4$
Энергетические эквиваленты:		
1 а. е. м.		931,5 МэВ
1 электрон-вольт		$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$



# МЕХАНИКА

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1\*

### 1.1. Содержание учебной программы по разделу «Физические основы механики» (для инженерно-технических специальностей)

**1. Элементы кинематики.** Кинематический закон движения материальной точки в координатной, естественной и векторной формах. Перемещение. Средние и мгновенные скорость и ускорение. Декартовы проекции скорости и ускорения. Нормальное и касательное ускорения. Движение точки по окружности. Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения. Связь угловых и линейных величин.

**2. Основы динамики.** Законы Ньютона. Виды силовых взаимодействий. Второй закон Ньютона как уравнение движения. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия материальной точки; законы изменения этих величин. Работа переменных сил. Консервативные силы, потенциальная энергия и их взаимосвязь. Неконсервативные силы, диссипация механической энергии. Законы изменения импульса, момента импульса и механической энергии системы. Центр масс, уравнение его движения. Динамические характеристики движения в системе центра масс. Замкнутые системы, законы сохранения импульса и момента импульса. Консервативные системы, закон сохранения механической энергии. Законы сохранения и симметрия пространства и время. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

**3. Динамика твердого тела.** Момент импульса и момент инерции тела относительно оси. Законы изменения и сохранения проекции момента импульса на ось вращения. Основное уравнение динамики вращательного движения. Кинетическая энергия сложного движения. Расчет потенциальной энергии в поле сил тяжести. Работа при вращательном движении. Законы изменения и сохранения механической энергии в сложном движении. Свободные оси и тензор моментов инерции. Гироскоп и его движение.

---

\* Материал этой работы подготовлен Наркевичем И. И. и Лобко С. И.

**4. Механические колебания.** Кинематический закон гармонических колебаний. Сложение одинаково направленных колебаний методом векторных диаграмм и комплексных амплитуд, сложение взаимоперпендикулярных колебаний. Дифференциальное уравнение колебаний. Период незатухающих колебаний пружинного, физического, крутильного маятников. Превращение энергии при гармонических колебаниях. Кинематический закон и характеристики затухающих колебаний. Вынужденные колебания. Явления резонанса.

**5. Механические волны.** Упругие силы, закон Гука для сплошной среды. Энергия упруго деформированного тела. Распространение колебаний в упругой среде. Уравнение волны. Волновое уравнение. Скорость распространения волн в твердых телах, жидкостях и газах. Волновой перенос энергии и его характеристики: поток, плотность потока, интенсивность. Интерференция и дифракция волн. Стоячие волны. Звук и ультразвук. Эффект Доплера. Дисперсия волн. Волновой пакет. Групповая скорость.

**6. Гидродинамика.** Скалярные и векторные поля. Векторные линии. Векторная трубка. Конвективные потоки массы, импульса, энергии. Плотности потока скалярных величин. Уравнения баланса массы, импульса и энергии в объеме сплошной среды. Силы давления в жидкости, гидростатика несжимаемой жидкости. Стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли. Внутреннее трение, закон Ньютона, формулы Пуазейля, Стокса. Ламинарный и турбулентный режимы течений жидкостей и газов. Число Рейнольдса.

**7. Элементы неклассической механики.** Границы применимости классической механики. Элементы частной теории относительности. Преобразования Галилея и Лоренца. Понятие одновременности. Относительность длин и промежутков времени. Интервал. Закон сложения скоростей. Импульс. Основной закон релятивистской динамики. Кинетическая энергия. Энергия покоя. Закон взаимосвязи массы и энергии. Энергия связи системы. Связь между энергией и импульсом частицы.

Элементы квантовой механики. Корпускулярно-волновой дуализм. Волновая функция и ее статистический смысл. Волновая функция свободной частицы. Соотношение неопределенностей. Стационарное уравнение Шредингера. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме. Квантование энергии. Энергия

гармонического осциллятора и жесткого ротатора. Нулевая энергия. Туннельный эффект.

## **1.2. Содержание учебной программы по разделу «Механика классическая, релятивистская и квантовая (физические основы механики)» (для химико-технологических специальностей)**

**1. Кинематика материальной точки.** Предмет кинематики. Понятие материальной точки. Система отсчета. Способы описания движения – векторный, координатные и естественный. Траектория, путь, перемещение. Векторы скорости, ускорения. Проекция на оси декартовой и естественной систем координат. Касательное и нормальное ускорения. Классификация движения материальной точки по виду траектории и характеру движения.

**2. Кинематика абсолютно твердого тела.** Виды движения – поступательное и вращательное. Степени свободы. Кинематический закон поступательного движения тела, его скорость и ускорение. Кинематический закон вращательного движения тела. Угловая скорость и ускорение тела. Связь линейных и угловых величин в векторном виде. Прямая и обратная задачи кинематики материальной точки и тела. Введение в кинематику сложного движения.

**3. Виды и законы силовых взаимодействий.** Фундаментальные взаимодействия и эмпирические (контактные) силы. Явления трения, скольжения и качения. Понятие о вязком трении. Сила Стокса. Законы Гука при растяжении (сжатии), сдвиге, изгибе и кручении. Модуль Юнга и модуль сдвига. Закон всемирного тяготения. Опыт Кавендиша. Сила тяжести и вес тела. Невесомость.

**4. Динамика материальной точки.** Предмет динамики. Основные понятия и величины. Законы Ньютона. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности. Инварианты. Меры действия на материальную точку (тело) – сила, момент силы, работа и мощность силы. Меры движения материальной точки – импульс, момент импульса и кинетическая энергия. Законы изменения и сохранения импульса, момента импульса и кинетической энергии. Законы Кеплера.

**5. Динамика системы материальных точек.** Силы внешние и внутренние. Аддитивные меры движения системы (импульс, момент импульса и кинетическая энергия) и законы их изменения. Центр масс. Закон движения центра масс. Движение тела переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского. Классическая

модель движения свободной двухатомной молекулы с деформируемой химической связью (поступательное, вращательное и колебательное движения).

**6. Динамика абсолютно твердого тела.** Уравнения динамики поступательного движения тела. Осевой момент инерции тела. Теорема Штейнера. Понятие о тензоре моментов инерции. Момент импульса тела. Основное уравнение динамики вращательного движения тела. Кинетическая энергия поступательного и вращательного движений. Работа силы при вращении тела. Свободные оси вращения. Гироскоп. Гироскопический эффект и его использование.

**7. Потенциальные и диссипативные силовые поля.** Силовое поле. Потенциальное поле. Потенциальная энергия. Полная механическая энергия. Закон сохранения полной энергии. Явление удара и виды ударов. Теорема Карно для абсолютно неупругого удара шаров (тел). Связь между силой и потенциальной энергией. Потенциальные яма и барьер. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесие в потенциальной яме. Напряженность и потенциал гравитационного поля и связь между ними. Принцип суперпозиции. Циркуляция и поток напряженности. Диссипативные силы. Движение частицы с участием сил сопротивления. Седиментационный анализ суспензий.

**8. Динамика относительного движения в неинерциальных системах отсчета.** Преобразование ускорения и силы при переходе в неинерциальную систему. Силы инерции. Сила Кориолиса и центробежная сила инерции. Принцип действия центрифуги (разделение суспензии на жидкую и твердую фазы). Вертикаль. Маятник Фуко.

**9. Колебания осцилляторов с одной степенью свободы.** Свободные колебания (незатухающие и затухающие). Энергия осциллятора, дифференциальные уравнения осцилляторов и их решение. Коэффициент затухания колебаний. Логарифмический декремент и время релаксации амплитуды. Добротность. Сложение гармонических колебаний. Уравнение вынужденных колебаний осциллятора и его решение с помощью векторной диаграммы. Явление резонанса. Зависимость резонансных кривых от сопротивления среды. Самовозбуждающиеся, параметрические и нелинейные колебания. Параметрический резонанс. Ангармонические





функция микрочастицы и ее физический смысл. Условие нормировки. Принцип неопределенности Гейзенберга. Принцип тождественности. Спин частицы. Фермионы и бозоны. Уравнение Шредингера (временное и стационарное) и его применение для микрочастиц в простейших потенциальных ямах. Спектр энергии для гармонического осциллятора и жесткого ротатора. Нулевые колебания. Туннельный эффект.

### 1.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения

#### **Тема 1. Кинематика материальной точки и твердого тела**

1. *Средняя (путевая) скорость* материальной точки на участке пути  $\Delta l$ , пройденном за время  $\Delta t$ :

$$v_{\text{ср}} = \Delta l / \Delta t. \quad (1.1)$$

2. Три способа задания *закона движения* материальной точки:

а) *векторный способ*

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (1.2)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор движущейся точки;

б) *координатный способ*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad (1.3)$$

в) *естественный способ* ( $s$  – дуговая координата)

$$s = s(t). \quad (1.4)$$

3. Формулы для определения *мгновенной скорости* при разных способах задания закона движения:

а) *векторный способ* – вектор скорости

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt; \quad (1.5)$$

б) *координатный способ* – проекции и модуль вектора скорости

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad (1.6)$$

в) *естественный способ* – проекция скорости на касательную к траектории точки и модуль скорости

$$v_\tau = ds / dt, \quad v = |v_\tau|. \quad (1.7)$$

4. Формулы для определения *мгновенного ускорения* при разных способах задания закона движения:

а) *векторный способ* – вектор ускорения

$$\dot{a} = d\dot{v} / dt ; \quad (1.8)$$

б) *координатный способ* – проекции и модуль вектора ускорения

$$a_x = dv_x / dt, \quad a_y = dv_y / dt, \quad a_z = dv_z / dt, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ; \quad (1.9)$$

в) *естественный способ* – проекции на касательную и нормаль к траектории точки, а также модуль ускорения

$$a_\tau = dv_\tau / dt, \quad a_n = v^2 / \rho, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad (1.10)$$

где  $a_\tau$  и  $a_n$  – соответственно *тангенциальное* и *нормальное* ускорения;  $\rho$  – радиус кривизны траектории движущейся точки.

5. *Абсолютно твердым телом* называется такое тело, деформации которого (изменение формы и размеров тела) при изучении его состояния равновесия или движения не учитываются.

Простейшими видами движения твердого тела являются его *поступательное движение* и *вращательное движение*, т. е. *вращение* вокруг неподвижной оси.

*Поступательным* называется такое движение, при котором любая прямая линия, проведенная в теле, движется параллельно самой себе. При поступательном движении твердого тела все его точки движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями.

*Вращением твердого тела* вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости этих окружностей перпендикулярны этой оси.

В качестве основных характеристик вращательного движения, которые являются общими для всего тела, используются *угол поворота*  $\varphi$ , *угловая скорость*  $\omega$  и *угловое ускорение*  $\varepsilon$ :

а) закон вращательного движения

$$\varphi = \varphi(t); \quad (1.11)$$

б) угловая скорость

$$\omega = d\varphi / dt; \quad (1.12)$$

в) угловое ускорение

$$\varepsilon = d\omega / dt = d^2\varphi / dt^2. \quad (1.13)$$

6. Уравнения связи между *линейными характеристиками* движения точки тела и *угловыми характеристиками* движения тела:

$$\left. \begin{aligned} \text{линейная скорость точки тела} & - v = \omega R, \\ \text{тангенциальное ускорение точки} & - a_\tau = \varepsilon R, \\ \text{нормальное ускорение точки} & - a_n = \omega^2 R, \\ \text{полное ускорение точки тела} & - a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где  $R$  – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения.

7. Для *равномерного* вращения твердого тела:

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = 2\pi / T = 2\pi n = \text{const}, \quad \varphi = \omega t, \quad \varphi = 2\pi N, \quad (1.15)$$

где  $n$  – количество оборотов в единицу времени;  $N$  – полное количество оборотов;  $T$  – период вращения тела.

8. Для *равнопеременного* вращения твердого тела:

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi. \quad (1.16)$$

## **Тема 2. Динамика материальной точки**

9. *Инертность* – это способность тел сохранять (при отсутствии внешних воздействий) неизменным состояние своего движения или покоя относительно инерциальной системы отсчета.

*Масса*  $m$  – физическая характеристика материи, которая определяет ее инерциальные и гравитационные свойства.

*Импульс*  $\vec{p}$  точки (количество движения) – физическая величина, равная произведению массы точки на ее скорость, т. е.

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.17)$$

*Сила*  $\vec{F}$  (или  $\vec{f}$ ) – векторная величина, являющаяся мерой воздействия одного тела на другое.

10. Из *первого закона Ньютона* (закон инерции) вытекает, что существуют *инерциальные системы* координат, относительно которых материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока силовое воздействие со стороны других тел не изменит ее состояние.

*Основным уравнением динамики* является *второй закон Ньютона*, согласно которому в инерциальной системе координат скорость изменения импульса  $\vec{p}$  материальной точки равна силе  $\vec{F}$  (равнодействующей сил), приложенной к этой точке, т. е.

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}, \quad \text{или} \quad d(m\vec{v})/dt = \vec{F}. \quad (1.18)$$

При неизменной с течением времени массе ( $m = \text{const}$ ) из (1.18) получим

$$m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}, \text{ или } \mathbf{p} = \mathbf{F}/m. \quad (1.19)$$

Третий закон Ньютона (закон действия и противодействия) утверждает, что силы взаимодействия двух материальных точек являются равными по величине, противоположными по направлению и действуют вдоль прямой, которая соединяет эти точки, т. е.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1.20)$$

11. Моментом силы относительно центра  $O$  называется вектор

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow M_O = Fr \sin(\hat{\mathbf{r}, \mathbf{F}}) = Fh, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, соединяющий центр  $O$  с материальной точкой, к которой приложена сила  $\mathbf{F}$ ;  $h$  – плечо силы  $\mathbf{F}$ .

Моментом импульса материальной точки  $\mathbf{L}_O$  относительно центра  $O$  называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  этой точки относительно центра  $O$ , на ее импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , т. е.

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \Rightarrow L_O = r m v \sin(\hat{\mathbf{r}, m\mathbf{v}}) = mvh, \quad (1.22)$$

где  $h$  – плечо импульса  $\mathbf{p}$  точки.

*Примечание.* Направления векторов  $\mathbf{M}_O$  и  $\mathbf{L}_O$  определяются правилом векторного умножения векторов или правилом правой руки.

Закон изменения момента импульса  $\mathbf{L}_O$  с течением времени задается следующим уравнением:

$$d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{M}_O \Rightarrow d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) называется также уравнением моментов для  $\mathbf{L}_O$  и  $\mathbf{M}_O$ .

12. Элементарная работа  $\delta A$  силы равна скалярному произведению силы  $\mathbf{F}$  и вектора перемещения  $d\mathbf{r}$ , т. е.

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Fds \cos(\hat{\mathbf{F}, d\mathbf{r}}). \quad (1.24)$$

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$K = mv^2/2. \quad (1.25)$$

Изменение кинетической энергии при переходе точки из положения 1 в положение 2 равно работе всех сил, которые действуют на материальную точку, т. е.

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \text{закон изменения кинетической энергии. (1.26)}$$

### **Тема 3. Динамика поступательного и вращательного движений твердого тела**

13. При поступательном движении все точки тела движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями и описывают одинаковые траектории, поэтому для изучения поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной какой-нибудь его точки, например *центра масс*. *Центр масс* движется в соответствии с уравнением, которое имеет вид второго закона Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}}_c = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, N - \text{закон движения центра масс, (1.27)}$$

где  $m$  – масса тела;  $\ddot{\vec{r}}_c$  – ускорение центра масс;  $\vec{F}_k^e$  – внешние силы (см. далее пункт 16).

14. Основными величинами динамики вращательного движения являются *осевой момент инерции* и *момент силы относительно оси*.

Момент инерции *материальной точки* относительно оси  $z$ :

$$I_z = mR^2, \quad (1.28)$$

где  $m$  – масса точки;  $R$  – кратчайшее расстояние от точки до оси  $z$ .

Момент инерции *твердого тела* относительно оси  $z$

$$I_z = \sum_{j=1}^n \Delta m_j R_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.29)$$

где  $\Delta m_j$  – массы частиц, на которые можно мысленно разбить тело;  $R_j$  – кратчайшие расстояния от  $j$ -й частицы до оси вращения.

Для вычисления момента инерции тела относительно произвольной оси  $z'$  пользуются *теоремой Штейнера*, согласно которой

$$I_{z'} = I_{cz} + md^2, \quad (1.30)$$

где  $I_{z'}$  – момент инерции относительно произвольной оси  $z'$ ;  $I_{cz}$  – момент инерции относительно оси  $z$ , которая параллельна заданной оси  $z'$  и проходит через центр масс тела;  $m$  – масса тела;  $d$  – расстояние между осями  $z$  и  $z'$ .

Моменты инерции *тонкого кольца, диска и однородного стержня* находятся по следующим формулам ( $m$  – масса тела;  $z$  – ось, которая проходит через центр масс перпендикулярно к плоскости кольца либо диска или оси стержня):

$$I_{cz} = mR^2, \quad R - \text{радиус кольца}; \quad (1.31)$$

$$I_{cz} = mR^2/2, \quad R - \text{радиус диска}; \quad (1.32)$$

$$I_{cz} = ml^2/12, \quad l - \text{длина стержня}. \quad (1.33)$$

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр, рассчитывается по формуле

$$I_{cz} = 2mR^2/5, \quad R - \text{радиус шара}. \quad (1.34)$$

Учитывая определения (1.21) для вектора момента силы относительно некоторого центра  $O$  ( $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ ), вводится *момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$* , проходящей через центр  $O$ , который равен проекции  $\vec{M}_O$  на эту ось и определяется по формуле

$$M_z = F_{\perp}h, \quad (1.35)$$

где  $F_{\perp}$  – составляющая силы, которая перпендикулярна оси;  $h$  – плечо этой составляющей, т. е. расстояние между осью  $z$  и линией действия перпендикулярной составляющей силы  $F_{\perp}$ .

*Основное уравнение динамики вращательного движения* твердого тела относительно неподвижной оси вращения имеет вид

$$I_z \varepsilon = \sum_{k=1}^N M_z(\vec{F}_k^e), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.36)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение;  $\vec{F}_k^e$  – внешние силы (см. далее пункт 16); суммирование здесь, как и в уравнении (1.27), проводится по индексу  $k$ , т. е. номеру внешних сил.

#### **Тема 4. Динамика системы материальных точек или твердых тел**

15. *Импульсом тела* называется векторная величина, равная произведению массы тела  $m$  на скорость  $\vec{v}_C$  его центра масс, т. е.  $\vec{P} = m\vec{v}_C$ . Импульс системы тел или материальных точек равен сумме их импульсов:

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j. \quad (1.37)$$

16. Силы, которые действуют на материальные точки и тела системы, делятся на *внешние* и *внутренние*. *Внешними* называются силы, которые действуют на точки или тела системы со стороны тех тел, которые не входят в эту систему. *Внутренние* силы – это силы взаимодействия между телами и точками рассматриваемой системы. Если внешних сил нет или их векторная сумма равна нулю, то такая система называется *замкнутой*. Для *замкнутой* системы ее импульс является постоянным, т. е. он не изменяется со временем:

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.38)$$

Это один из важнейших законов физики – *закон сохранения импульса для замкнутой механической системы*.

В случае *незамкнутой* системы ее импульс изменяется, а центр масс движется с ускорением  $\vec{a}_c$  под воздействием внешних сил:

$$d\vec{P}/dt = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \Rightarrow m\vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (1.39)$$

Выполняя интегрирование по времени от  $t_1$  до  $t_2$ , получим

$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e dt \Rightarrow \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \vec{F}_{cp}^e \tau, \quad (1.40)$$

где  $\vec{F}_{cp}^e$  – среднее значение внешних сил за время  $\tau = t_2 - t_1$ .

17. *Момент импульса*  $L_z$  тела относительно некоторой оси вращения  $z$  ( $L_z$  – проекция вектора  $\vec{L}_O$  на ось  $z$ ) определяется по формуле

$$L_z = I_z \omega, \quad (1.41)$$

где  $I_z$  – осевой момент инерции тела.

*Момент силы*  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  равен произведению перпендикулярной к оси составляющей этой силы ( $F_\perp$ ) на ее плечо  $h$ :

$$M_z(\vec{F}) = F_\perp h. \quad (1.42)$$

18. Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система) или их суммарный момент относительно оси вращения равен нулю, то момент импульса относительно этой оси сохраняется:

$$L_z = \text{const} - \text{закон сохранения проекции вектора } \vec{L}. \quad (1.43)$$

В противном случае проекция  $L_z$  системы изменяется под воздействием результирующего момента всех внешних сил  $M_z^e$ :

$$dL_z/dt = M_z^e \Rightarrow \int_{L_1}^{L_2} dL_z = \int_{t_1}^{t_2} M_z^e dt \Rightarrow L_2 - L_1 = M_{\text{ср}} \tau, \quad (1.44)$$

где  $M_{\text{ср}}$  – среднее значение момента внешних сил за время  $\tau = t_2 - t_1$ .

Для абсолютно твердого тела ( $I_z = \text{const}$ ) из формулы (1.44) с учетом (1.41) получается *основное уравнение динамики* вращательного движения:

$$I_z d\omega/dt = M_z^e, \text{ или } I_z \varepsilon = M_z^e. \quad (1.45)$$

19. *Кинетическая энергия механической системы* равна сумме кинетических энергий материальных точек, входящих в эту систему:

$$K = \sum_{j=1}^n m_j v_j^2 / 2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Кинетическая энергия твердого тела при поступательном и вращательном движениях вычисляется, соответственно, по следующим формулам:

$$K_{\text{пост}} = mv_c^2 / 2, \quad K_{\text{вращ}} = I_z \omega^2 / 2. \quad (1.46)$$

20. Изменение кинетической энергии системы за конечный промежуток времени равно работе всех внешних и внутренних сил:

$$K - K_0 = A^e + A^i - \text{закон изменения кинетической энергии}. \quad (1.47)$$

Если между телами замкнутой системы действуют только *потенциальные силы*, то полная механическая энергия  $E$  сохраняется:

$$E = K + \Pi = \text{const} - \text{закон сохранения энергии}. \quad (1.48)$$

Здесь  $\Pi$  – *потенциальная энергия* механической системы, которая численно равна работе консервативных сил поля при перемещении тел системы из заданного положения на *нулевой уровень*, для которого потенциальная энергия принимается равной нулю.



Работа момента  $M$  при вращательном движении твердого тела

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi.$$

### **Тема 5. Гидроаэродинамика**

21. *Среднее давление* определяется отношением силы  $F_n$ , нормальной, т. е. перпендикулярной некоторой площадке с площадью  $S$ , к величине этой площадки:

$$p_{\text{ср}} = F_n / S. \quad (1.49)$$

22. Чтобы определить *локальное давление*  $p(x, y, z)$  среды, нужно взять отношение силы  $dF_n$ , действующей на маленькую площадку в среде, к площади  $dS$  этой площадки:

$$p(x, y, z) = dF_n / dS. \quad (1.50)$$

23. *Сжимаемость среды* характеризуется коэффициентом сжимаемости  $k = V^{-1}(\Delta V / \Delta p)$ , зависящим от условий, при которых происходит изменение объема и давления среды.

*Несжимаемой* называют такую среду, для которой при изменении давления на  $\Delta p$  практически не происходит изменение ее объема ( $\Delta V \cong 0$ ). Примерами такой среды можно считать реальные жидкости.

24. Благодаря *слабой сжимаемости и большой текучести* жидкость передает оказываемое на нее внешнее давление во всех направлениях *без изменения* (закон Паскаля).

25. Зависимость давления несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) жидкости от глубины  $h$  вычисляется по формуле

$$p(h) = p_0 + \rho gh, \quad (1.51)$$

$p_0$  – внешнее давление;  $\rho gh$  – гидростатическое давление.

26. На погруженное в жидкость (или газ) тело действует *выталкивающая сила*, которая равна весу среды, вытесненной этим телом:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{т}} - \text{закон Архимеда.} \quad (1.52)$$

27. *Идеальная текучая среда* – это среда, силы вязкого трения между слоями которой можно не учитывать.

28. *Стационарное течение* – это установившееся движение текучей среды, при котором скорость ее частиц в каждой точке потока с течением времени не изменяется.

29. Течение жидкости называется *ламинарным* (слоистым), если слои жидкости, выделенные вдоль ее потока, не перемешиваются между собой. При *турбулентном* (вихревом) течении происходит перемешивание жидкости за счет вихреобразования.

30. *Уравнение непрерывности потока* (трубки тока) соответственно для сжимаемой ( $\rho \neq \text{const}$ ) и несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) сред:

$$m_{\text{сек}} = \rho v S = \text{const} \quad \text{и} \quad V_{\text{сек}} = v S = \text{const}, \quad (1.53)$$

где  $v$  – скорость частиц среды;  $S$  – площадь поперечного сечения потока;  $m_{\text{сек}}$  и  $V_{\text{сек}}$  – массовый и объемный секундные расходы среды.

31. *Уравнение Бернулли* для трубки тока среды (следствие закона изменения энергии объема среды под воздействием сил давления):

$$\rho v^2/2 + \rho gh + p = \text{const} \quad (\text{на линии тока течения среды}). \quad (1.54)$$

32. Если идеальная среда, которая находится в широком сосуде, вытекает из малого отверстия, то *средняя по сечению отверстия  $B$  скорость  $v_B$*  среды определяется по формуле ( $v_A \ll v_B$ ;  $v_A$  – скорость перемещения свободной поверхности среды в широком сосуде):

$$v_B \cong \sqrt{2[(p_A - p_B) + \rho_A g h_A - \rho_B g h_B] / \rho_B} \quad \text{при } \rho_A \neq \rho_B \neq \text{const}, \quad (1.55, \text{a})$$

$$v_B \cong \sqrt{2[(p_A - p_B) + \rho g (h_A - h_B)] / \rho} \quad \text{при } \rho_A = \rho_B = \text{const}. \quad (1.55, \text{б})$$

Формулы (1.55) являются результатом применения уравнения Бернулли (1.54) и уравнения непрерывности потока (1.53) к двум сечениям  $A$  и  $B$  ( $A$  – свободная поверхность среды в сосуде на высоте  $h_A$ , которая находится под давлением  $p_A$ ;  $B$  – сечение малого отверстия на высоте  $h_B < h_A$ , давление в котором равно  $p_B$ ).

В случае, если  $p_A = p_B = p_{\text{атм}}$ , из (1.54) получается известная *формула Торричелли*:

$$v_B = \sqrt{2gh}, \quad h = h_A - h_B. \quad (1.56)$$

## **Тема 6. Гармонические колебания и волны в упругих средах**

33. Дифференциальное уравнение *свободных незатухающих гармонических колебаний* и его решение:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \Rightarrow s = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.57)$$

где  $s$  – отклонение материального объекта от положения равновесия (линейное – в метрах, угловое – в радианах);  $A$  – амплитуда;  $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi/T_0$  – циклическая частота;  $T_0$  – период колебаний;  $\varphi = (\omega_0 t + \alpha)$  – фаза колебаний в момент времени  $t$ ;  $\alpha$  – начальная фаза.

*Периоды колебаний пружинного, математического и физического маятников соответственно:*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{I_x/(mgl_0)}, \quad (1.58)$$

где  $m$  – масса колеблющегося тела или материальной точки;  $k$  – коэффициент жесткости пружины;  $l$  – длина математического маятника;

$I_x$  – момент инерции физического маятника относительно горизонтальной оси  $x$  подвеса;  $l_0$  – расстояние от оси подвеса до центра масс колеблющегося тела.

*Приведенная длина физического маятника*

$$l_{\text{пр}} = I_x/(ml_0). \quad (1.59)$$

*Полная механическая энергия  $E$*  (сумма кинетической и потенциальной) материальной точки либо тела, которые совершают гармонические колебания:

$$E = E_k + E_{\text{п}} = \text{const} \Rightarrow E = mA^2\omega_0^2/2 = kA^2/2. \quad (1.60)$$

34. При сложении двух *одинаково направленных колебаний*, например, вдоль оси  $x$  ( $s_1 = x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$  и  $s_2 = x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$ ), получается результирующее колебание  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ ,

$$\text{где } A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \text{tg } \alpha = \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}. \quad (1.61)$$

Если материальная точка одновременно участвует в двух *взаимно перпендикулярных колебаниях* одинаковой частоты ( $s_1 \equiv x = A \cos(\omega t + \alpha_1)$ ,  $s_2 \equiv y = B \cos(\omega t + \alpha_2)$ ), то ее результирующее движение будет происходить по эллипсу, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} \cos(\Delta\alpha) = \sin^2(\Delta\alpha), \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (1.62)$$

В зависимости от значения разности фаз  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  складываемых колебаний, эллипс вырождается в прямую, если  $\Delta\alpha = 0, \pm\pi$ , или в окружность, если  $\Delta\alpha = \pm\pi/2$  и  $A = B$ .

35. Дифференциальное уравнение свободных затухающих гармонических колебаний и его решение:

$$\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \Rightarrow s = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1.63)$$

где  $\beta = \mu/2m$  – коэффициент затухания ( $\mu$  – коэффициент в формуле для силы сопротивления ( $F_x = -\mu x$  – сила Стокса)).

*Логарифмический декремент затухания колебаний*

$$\delta = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + T)} = \beta T. \quad (1.64)$$

36. Дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний и его решение:

$$\ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = F_0 \cos pt \Rightarrow s = A \cos(pt - \alpha), \quad (1.65)$$

где  $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}$ ,  $\tan \alpha = \frac{2\beta p}{\omega_0^2 - p^2}$  ( $\alpha$  – начальная фаза);

$F_0$  – амплитуда, а  $p$  – частота вынуждающей силы  $F = F_0 \cos pt$ .

37. Дифференциальное (волновое) уравнение плоской волны, которая распространяется вдоль оси  $x$  с фазовой скоростью  $v$ , и его решение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow s = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (1.66)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число, т. е. модуль волнового вектора  $\vec{k}$ , который определяет направление распространения волны.

Длина волны  $\lambda$ , ее фазовая скорость  $v$  и частота  $\nu = 1/T$  (или период  $T$ ) связаны следующими соотношениями:

$$\lambda = vT \Rightarrow v = \lambda/T = \lambda\nu. \quad (1.67)$$

*Фазовые скорости распространения волн в однородной среде:*

а) продольных и поперечных волн в твердых телах

$$v_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}, \quad v_{\perp} = \sqrt{G/\rho}; \quad (1.68)$$

б) продольных волн в газах или жидкостях

$$v_{\parallel} = \sqrt{K/\rho}, \quad K = -Vdp/dV, \quad (1.69)$$

где  $E$  и  $G$  – модули Юнга и сдвига для твердых тел;  $K$  – модуль всестороннего сжатия газа или жидкости;  $\rho$  – плотность среды;  $p$  и  $V$  – давление и объем среды.

*Уравнения связи между волновым числом и характеристиками волны*

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/vT = \omega/v. \quad (1.70)$$

*Групповая скорость  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$  пакета волн*

$$v_{\text{гр}} = v - \lambda dv/d\lambda - \text{формула Рэлея.} \quad (1.71)$$

*Среднее значение плотности энергии  $w_{\text{ср}}$  упругой волны*

$$w_{\text{ср}} = \Delta W_{\text{ср}}/\Delta V = \rho A^2 \omega^2/2, \quad (1.72)$$

где  $\Delta W_{\text{ср}}$  – среднее значение полной энергии колеблющейся частицы упругой среды объемом  $\Delta V$ ;  $\rho$  – плотность среды.

*Волновой поток энергии  $\Delta\Phi_{\text{ср}}$  через перпендикулярную к вектору  $\vec{v}$  площадку  $\Delta S_{\perp}$*

$$\Delta\Phi_{\text{ср}} = \Delta W_{\text{ср}}^*/\Delta t = w_{\text{ср}} v \Delta S_{\perp}, \quad (1.73)$$

где  $\Delta W_{\text{ср}}^*$  – энергия, переносимая волной через площадку  $\Delta S_{\perp}$  за время  $\Delta t$ .

*Интенсивность  $I$  волны равна энергии, которая переносится волной через единичную площадку за единицу времени, т. е.*

$$I = \Delta W_{\text{ср}}/(\Delta S_{\perp} \Delta t) = \Delta\Phi/\Delta S_{\perp} = w_{\text{ср}} v = \rho A^2 \omega^2 v/2. \quad (1.74)$$

*При эффекте Доплера частота  $\nu$  волны, воспринимаемая приемником, связана с частотой  $\nu_0$  колеблющегося источника волны:*

$$\nu = \nu_0 \frac{1 \pm v_{\text{пр}}/v}{1 \pm v_{\text{ист}}/v}, \quad (1.75)$$

где  $v_{\text{пр}}$  и  $v_{\text{ист}}$  – скорости движения приемника и источника соответственно (относительно среды);  $v$  – фазовая скорость монохроматической волны ( $v = \omega/(2\pi)$ ); верхние знаки перед скоростями  $v_{\text{пр}}$  и  $v_{\text{ист}}$  берутся в том случае, если соответствующая скорость направлена в сторону сближения источника и приемника, в противном случае выбираем нижний знак.

## **Тема 7. Элементы релятивистской механики**

38. *Преобразования Лоренца* для координат и времени одного и того же события в двух инерциальных системах  $K$  и  $K'$ , которые движутся поступательно друг относительно друга с постоянной скоростью  $\vec{V}$ , направленной параллельно осям  $x$  и  $x'$  (направления всех осей системы координат совпадают):

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (1.76)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме, одинаковая в разных системах ( $c = c'$ ), т. е. скорость  $c$  является *инвариантом* ( $c = \text{inv}$ ).

Следствия из преобразований Лоренца:

а) *длина  $l$  объекта (линейки), движущегося вдоль оси  $x$  в системе  $K$ , связана с его длиной  $l_0$  в собственной системе  $K_0$ , в которой предмет покоится:*

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \text{ – эффект сокращения длины } (l < l_0), \quad (1.77)$$

где  $v = V_0$  – скорость движения объекта, совпадающая со скоростью связанной с ним системы  $K_0$ ;

б) *собственное время  $\tau$ , равное промежутку времени между двумя событиями данного объекта, который рассчитан по часам, находящимся в собственной системе  $K_0$  ( $\tau = t_{02} - t_{01}$ ), связано с промежутком времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  между этими же событиями в системе  $K$ , относительно которой объект движется со скоростью  $v$ :*

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ – эффект замедления хода времени } (\tau < \Delta t). \quad (1.78)$$

*Интервал  $\Delta s$  между двумя событиями в четырехмерном пространстве координат и времени  $(x, y, z, t)$  является инвариантом, т. к. он не изменяется при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$ :*

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \text{inv}. \quad (1.79)$$

39. Масса  $m$  релятивистской частицы, ее импульс  $\vec{p}$ , полная энергия  $E$  и кинетическая энергия  $K$  в инерционной системе  $K$ , относительно которой частица движется со скоростью  $v$ :

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \vec{p} = m\vec{v}, \quad E = mc^2, \quad K = E - E_0, \quad (1.80)$$

где  $m_0$  – масса покоя;  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя, т. е. это масса и

энергия частицы в собственной системе  $K_0$ , в которой частица покоится.

Уравнение взаимосвязи между энергией  $E$  и импульсом  $\vec{p}$  релятивистской частицы, для которой скорость  $v$  сравнима со скоростью  $c$  света в вакууме ( $v \lesssim c$ ):

$$E^2 - p^2 c^2 = \text{inv.} \quad (1.81)$$

### Тема 8. Элементы квантовой механики

40. Энергия  $E$ , импульс  $p$  и масса  $m$  фотона света как безмассовой частицы, для которой масса покоя  $m_0 = 0$ :

$$E = h\nu = h\omega / (2\pi) = \hbar\omega, \quad h = 2\pi\hbar - \text{постоянная Планка}, \quad (1.82)$$

$$p = E/c = h\nu/c = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{p}; \quad (1.83)$$

$$E = mc^2 \Rightarrow m = E/c^2 = p/c. \quad (1.84)$$

41. Согласно гипотезе Луи де Бройля, длина волны квантовой микрочастицы определяется по формуле, аналогичной формуле (1.83):

$$\lambda = h/p = h/(mv) - \text{дебройлевская длина волны}. \quad (1.85)$$

Волновая функция  $\Psi$  свободной микрочастицы, движущейся вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$

$$\Psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)} = A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}. \quad (1.86)$$

42. Квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности  $f(x, y, z, t)$  того, что в заданный момент времени  $t$  квантовая частица находится в точке с координатами  $x, y, z$ :

$$f(x, y, z, t) = dP/dV = |\Psi|^2 = \Psi \Psi^* - \text{постулат М. Борна}, \quad (1.87)$$

где  $dP$  – вероятность обнаружения микрочастицы в объеме  $dV$ ;  $\Psi^*$  – функция, комплексно сопряженная с волновой функцией  $\Psi$ .

Условие нормировки для волновой функции частицы, находящейся в объеме  $V$

$$\int_V |\Psi|^2 dV = 1. \quad (1.88)$$

Соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta P_x \geq \eta, \quad \Delta y \Delta P_y \geq \eta, \quad \Delta z \Delta P_z \geq \eta, \quad \Delta t \Delta E \geq \eta. \quad (1.89)$$

43. Уравнение Шредингера для квантовой микрочастицы с массой  $m$  и энергией  $U(x, y, z, t)$  во внешнем силовом поле

$$-\frac{\eta}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\eta^2}{2m} \Delta \Psi + U(\mathbf{r}, t) \Psi, \quad (1.90)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  – дифференциальный оператор Лапласа.

44. Решение уравнение Шредингера для микрочастицы в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L$

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_n t/\eta} \sin \frac{n\pi}{L} x - \text{волновая функция микрочастицы.} \quad (1.91)$$

Здесь  $E_n$  – энергия микрочастицы в квантовом состоянии с номером  $n$  ( $n$  – главное квантовое число).

Дискретный спектр энергии этой микрочастицы

$$E_n = \frac{\pi^2 \eta^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.92)$$

45. Решение уравнения Шредингера для квантового осциллятора (частица в параболической потенциальной яме) с энергией  $U = kx^2/2$ .

Основное состояние квантового осциллятора ( $n = 0$ )

$$\Psi_0(x, t) = A_0 e^{-iE_0 t/\eta} e^{-m\omega_0 x^2/(2\eta)}, \quad E_0 = \frac{1}{2} \eta \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \quad (1.93)$$

Первое возбужденное состояние ( $n = 1$ )

$$\Psi_1(x, t) = A_1 e^{-iE_1 t/\eta} x e^{-m\omega_0 x^2/(2\eta)}, \quad E_1 = \frac{3}{2} \eta \omega_0. \quad (1.94)$$

Спектр энергии квантового осциллятора

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \eta \omega_0. \quad (1.95)$$

46. Вероятность  $D$  прохождения микрочастицы через прямоугольный барьер высотой  $U_0$  и шириной  $L$  (туннельный эффект)



$$D \cong \exp \left\{ -\frac{2L}{\eta} \sqrt{2m(U_0 - E)} \right\} - \text{коэффициент прозрачности. (1.96)}$$

#### 1.4. Примеры решения задач

**Пример 1. Кинематика вращательного движения тела.** Диск радиусом  $r = 0,1$  м вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $A = 10$  рад;  $B = 20$  рад/с;  $C = -2$  рад/с<sup>2</sup>. Для момента времени  $t_1 = 4$  с определите полное ускорение точки  $M$ , находящейся на ободе диска.

Дано:  
 $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$ ;  
 $t_1 = 4$  с;  $r = 0,1$  м  
 Найти:  $\vec{a}_M$

**Решение.** Полное ускорение  $\vec{a}$  точки  $M$  (рис. 1), движущейся по криволинейной траектории, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения  $\vec{a}_\tau$ , направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения  $\vec{a}_n$ , направленного к центру кривизны траектории (см. формулы (1.14)):  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ . Так как векторы  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  взаимно перпендикулярны, то абсолютная величина полного ускорения  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ .

Тангенциальное и нормальное ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами (1.14):

$$a_\tau = \varepsilon r, \quad a_n = \omega^2 r, \quad (1)$$

где  $\omega$  – угловая скорость тела;  $\varepsilon$  – его угловое ускорение.

Подставляя выражения для  $a_\tau$  и  $a_n$  в формулу (1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Угловую скорость  $\omega$  найдем, взяв первую производную от угла поворота  $\varphi$  по времени  $t$ :  $\omega = d\varphi / dt = 20 - 4t$ .

В момент времени  $t_1 = 4$  с угловая скорость  $\omega = [20 - 4 \cdot 4] = 4$  рад/с  $> 0$ .

Угловое ускорение  $\varepsilon$  определим, взяв первую производную от угловой скорости  $\omega$  по времени  $t$ :  $\varepsilon = d\omega / dt = -4$  рад/с<sup>2</sup>  $< 0$ .

Значения  $\omega$  и  $\varepsilon$  противоположны по знаку, следовательно, в заданный момент времени  $t_1 = 4$  с вращение замедленное (рис. 1).

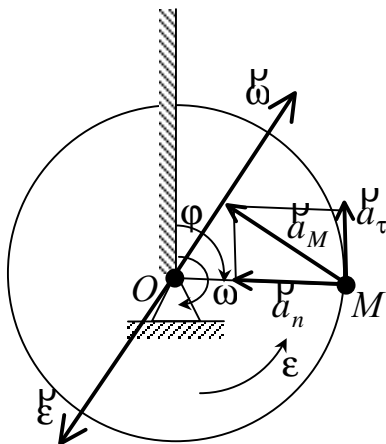


Рис. 1

Подставляя найденные значения  $\omega$  и  $\epsilon$ , а также заданное значение  $r$  в формулы (1, 2), получим

$$a_{\tau} = -4 \cdot 0,1 = -0,4 \text{ м/с}^2; \quad a_n = 4^2 \cdot 0,1 = 1,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a = 0,1 \sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Учитывая числовые значения и знаки всех рассчитанных величин, укажем направления векторов  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{a}_{\tau}$ ,  $\vec{a}_n$  и  $\vec{a}$  на рис. 1 (направления векторов  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\epsilon}$  определены по *правилу буравчика*).

**Пример 2. Закон сохранения энергии при наличии сил тяжести и упругости.** При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой  $m = 20$  г поднялась на высоту  $h = 5$  м. Определить коэффициент жесткости  $k$  пружины пистолета, если перед выстрелом она была сжата на  $\Delta l = 10$  см. Массой пружины пренебречь.

Дано:  
 $m = 0,02$  кг;  
 $h = 5$  м;  
 $\Delta l = 0,1$  м  
 Найти:  $k$

*Решение.* Прежде всего проследим за энергетическими превращениями, с которыми связан выстрел из пружинного пистолета. При зарядке пистолета сжимается пружина и совершается работа  $A$ , в результате чего пружина приобретает потенциальную энергию  $\Pi_1$ . При выстреле потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию  $K_1$  пули, которая затем при подъеме пули на высоту  $h$  превращается в потенциальную энергию  $\Pi_1 = mgh$  пули. Если пренебречь потерями энергии в этой «цепочке» энергетических превращений, то на основании закона сохранения энергии (1.48) можно записать, что

$$A = \Pi_1 \Rightarrow A = mgh. \quad (1)$$

Рассчитаем работу  $A$ . Сила  $F$ , сжимающая пружину (рис. 2), является переменной: в каждый момент времени она по направлению противоположна силе упругости  $F_{\text{упр}}$  и численно равна ей (рис. 2). Сила упругости, возникающая в пружине при ее деформации, определяется по *закону Гука*:  $F_{\text{упр}} = -kx$ , где  $x$  – абсолютная деформация пружины.

Работу переменной силы вычислим как

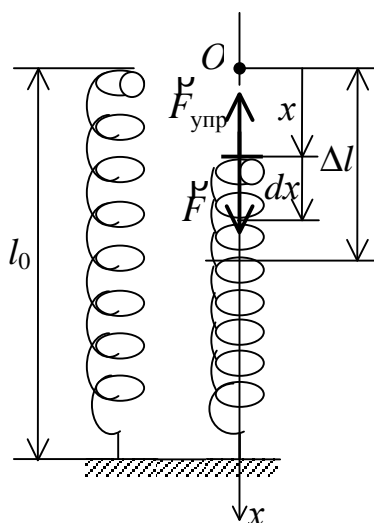


Рис. 2

сумму элементарных работ, рассчитываемых по формуле (1.24). Элементарная работа силы  $\vec{F}$  при сжатии пружины на  $dx$  выразится формулой

$$\delta A = Fdx, \text{ или } \delta A = kx dx.$$

Интегрируя в пределах от 0 до  $\Delta l$ , получим

$$A = k \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{\Delta l} = \frac{1}{2} k \Delta l^2. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в уравнение (1), найдем коэффициент жесткости:

$$k(\Delta l)^2/2 = mgh \Rightarrow k = 2mgh/\Delta l^2. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей расчетной формулы (3). Для этого подставим в формулу (3) вместо величин их единицы в СИ:

$$1 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу (3), получим

$$k = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 9,81 \cdot 5}{(0,1)^2} = 196 \text{ Н/м}.$$

**Пример 3. Законы сохранения при ударе шаров как материальных точек.** Шар массой  $m_1$ , движущийся горизонтально с некоторой скоростью  $v_1$ , столкнулся с неподвижным шаром массой  $m_2$ . Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю  $\varepsilon$  своей кинетической энергии первый шар передал второму?

*Дано:*

$m_1; m_2; v_1$

*Найти:*

$\varepsilon = \Delta K_1 / K_1$

*Решение.* Поскольку при упругом ударе (рис. 3) изменение кинетической энергии первого шара равно кинетической энергии, приобретенной вторым шаром ( $\Delta K_1 = K_2$ ), то доля  $\varepsilon$  энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left( \frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (1)$$

где  $u_2$  – скорость второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для

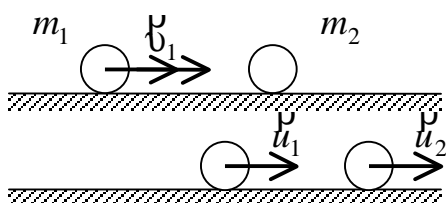


Рис. 3

определения  $\varepsilon$  надо найти  $u_2$ . При ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии. Пользуясь этими законами, запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 u_2 = m_1 u_1, & (2) \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \Rightarrow m_1 v_1^2 - m_2 u_2^2 = m_1 u_1^2. & (3) \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнение (2) возведем в квадрат, а уравнение (3) домножим на  $m_1$ . Приравняв левые части новых уравнений, получим

$$\begin{aligned} m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 u_2 + m_2^2 u_2^2 &= m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 u_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_2 &= 2m_1 v_1 / (m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Подставив выражение для  $u_2$  в формулу (1), а затем сократив на  $v_1$  и  $m_1$ , найдем долю переданной энергии, т. е.

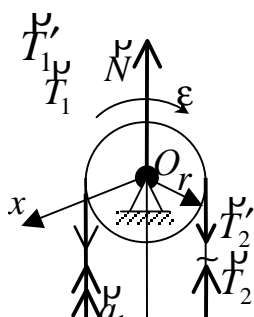
$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[ \frac{2m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из полученного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Заметим также, что доля передаваемой энергии не изменится, если шары перед ударом поменять местами.

**Пример 4. Динамика системы твердых тел.** Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу  $m = 80$  г (рис. 4), перекинута тонкая, гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами  $m_1 = 100$  г и  $m_2 = 200$  г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением и массой нити пренебречь.

Дано:  
 $m = 0,08$  кг;  
 $m_1 = 0,1$  кг;  
 $m_2 = 0,2$  кг  
 Найти:  $a$

*Решение.* Воспользуемся законом движения центра масс (1.27), описывающим динамику поступательного движения, и основным уравнением динамики вращательного движения (1.36). Для этого рассмотрим все силы, действующие на каждый груз и блок в отдельности (рис. 4). На первый груз



действует две силы: сила тяжести  $m_1 g$  и сила упругости  $T_1$  (сила натяжения нити). Поскольку  $m_2 > m_1$ , то ускорение  $a_2$  второго груза будет направлено вниз, первого – вверх, а угловое ускорение  $\varepsilon$  диска – по часовой стрелке. Спроецируем эти силы на ось  $y$ , которую направим вертикально вниз, и с помощью уравнения (1.27) или второго закона Ньютона составим уравнение движения первого груза в координатной форме ( $a_1 = a_2 = a$ ):

$$-m_1 a = m_1 g - T_1 \Rightarrow T_1 = m_1(g + a). \quad (1)$$

Уравнение движения для второго груза составим аналогично:

$$+m_2 a = m_2 g - T_2 \Rightarrow T_2 = m_2(g - a). \quad (2)$$

Под действием моментов сил  $T_1'$  и  $T_2'$  (относительно оси  $O$ ) блок приобретает угловое ускорение  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = a/r$ ,  $r$  – радиус блока). Согласно основному уравнению динамики вращательного движения (см. уравнение (1.36)) получим

$$I_x \varepsilon = -T_1' r + T_2' r, \quad (3)$$

где  $I_x = mr^2/2$  – момент инерции блока (сплошного диска) относительно горизонтальной оси  $x$ , которая совпадает с осью вращения блока.

Согласно третьему закону Ньютона  $T_1' = T_1$ , а  $T_2' = T_2$ . Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо  $T_1'$  и  $T_2'$ :

$$mr^2 a / (2r) = m_2(g - a)r - m_1(g + a)r.$$

После сокращения на  $r$  и перегруппировки членов найдем модуль  $a$  ускорений грузов:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + (m/2)} g = \frac{(0,2 - 0,1) \cdot 9,81}{0,1 + 0,2 + 0,08/2} = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

Из формулы для ускорения  $a$  видно, что единицы измерения левой и правой частей одинаковы.

**Пример 5. Изучение динамики вращательного движения с помощью закона изменения момента импульса твердого тела.** Маховик в виде тонкостенного цилиндра радиусом  $R = 0,2$  м и массой  $m = 50$  кг раскручен до частоты вращения  $n_1 = 480$  об/мин и предоставлен самому себе. Определить момент сил трения на оси

маховика, если он остановился через промежуток времени  $\Delta t = 50$  с.

Дано:

$$R = 0,2 \text{ м};$$

$$m = 50 \text{ кг};$$

$$n_1 = 8 \text{ об/с};$$

$$\Delta t = 50 \text{ с};$$

$$n_2 = 0$$

Найти:  $M_x^{\text{тр}}$

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом изменения проекции момента импульса (см. уравнение (1.44)) на ось вращения (рис. 5):

$$dL_x/dt = M_x^e \Rightarrow dL_x = M_x^e dt, \quad (1)$$

где  $dL_x$  – изменение проекции момента импульса маховика за время  $dt$ ;  $M_x^e$  – момент всех внешних сил относительно оси  $x$  (в данном случае это момент сил трения, т. к. моменты сил  $\vec{N}$  и  $m\vec{g}$  относительно оси  $x$  равны нулю).

Момент сил трения не изменяется с течением времени ( $M_x^{\text{тр}} = \text{const}$ ), поэтому после интегрирования уравнения (1) получим

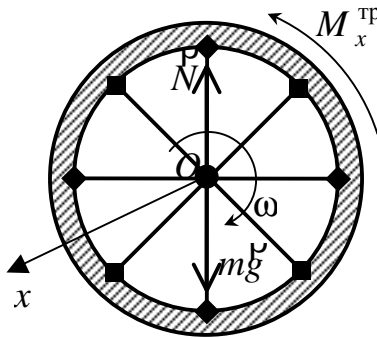


Рис. 5

$$\int_{L_{1x}}^{L_{2x}} dL_x = M_x^{\text{тр}} \int_0^{\Delta t} dt \Rightarrow L_{2x} - L_{1x} = M_x^{\text{тр}} \Delta t. \quad (2)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси момент импульса  $L_x = I_x \omega$  (см. формулу (1.41)), поэтому его изменение

$$\Delta L_x = L_{2x} - L_{1x} = I_x \Delta \omega = I_x 2\pi(n_2 - n_1), \quad (3)$$

где  $I_x = mR^2$  – момент инерции тонкостенного цилиндра (кольца) относительно оси  $x$ ;  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$  – изменение угловой скорости маховика, которое с помощью формулы  $\omega = 2\pi n$  выражено через частоту вращения маховика.

Подставляя выражение (3) в уравнение (2), получим

$$2\pi mR^2(n_2 - n_1) = M_x^{\text{тр}} \Delta t \Rightarrow M_x^{\text{тр}} = 2\pi mR^2(n_2 - n_1)/\Delta t. \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ с}^{-1} / 1 \text{ с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В расчетную формулу (4) подставим числовые значения. В результате получим

$$M_z = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,2^2 (0 - 8) / 50 = -2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Знак «—» показывает, что силы трения оказывают на маховик тормозящее действие.

**Пример 6. Сохранение момента импульса системы.** На краю горизонтальной платформы в виде диска радиуса  $R$  и массой  $m_1$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega_0$ , находится человек массой  $m_2$ . Определить угловую скорость платформы в двух случаях: если человек перешел в ее центр (случай *а*) и если человек начал двигаться вдоль края платформы с постоянной относительной скоростью  $u$  (случай *б*).

Дано:

$m_1; m_2; R; \omega_0; u$

Найти:  $\omega$

*Решение.* На рис. 6 укажем все внешние силы, действующие на систему. Поскольку эти силы пересекают ось вращения (реакции опор) либо параллельны ей (силы тяжести), то моменты таких сил равны нулю, а момент импульса системы сохраняется, т. е.

$$L_z = \text{const.} \quad (1)$$

*Случай а.* С помощью формул (1.22) и (1.41) рассчитаем момент импульса системы (рис. 6,а) в начальном (человек стоит на краю платформы) и конечном (человек в центре) положениях (человека рассматриваем как материальную точку):

$$L_z^{\text{нач}} = I_z \omega_0 + m_2 v_0 R = \frac{m_1 R^2}{2} \omega_0 + m_2 \omega_0 R^2 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \omega_0;$$

$$L_z^{\text{кон}} = I_z \omega_1 = m_1 R^2 / 2 \omega.$$

Приравнявая эти выражения, после сокращений получим

$$\left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \omega_0 = \frac{m_1 R^2}{2} \omega \Rightarrow \omega = \frac{(m_1/2 + m_2)}{m_1/2} \omega_0 = \left( 1 + \frac{2m_2}{m_1} \right) \omega_0. \quad (2)$$

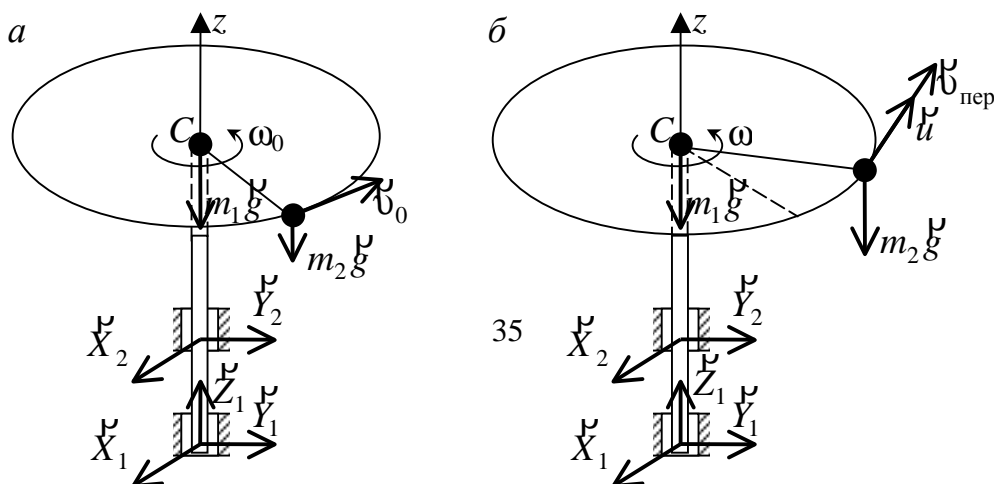


Рис. 6

Поскольку  $\omega > \omega_0$ , то после перемещения человека в центр платформы она будет вращаться быстрее.

Заметим, что кинетическая энергия системы при этом увеличится, поскольку внутренние силы мышц человека выполняют положительную работу ( $A^{\text{внут}} = K - K_0$ ). Убедитесь в этом самостоятельно, вычислив начальную ( $K_0$ ) и конечную ( $K$ ) кинетические энергии системы платформа – человек.

*Случай б.* При перемещении человека вдоль края платформы (рис. 6,б) его абсолютная скорость состоит из переносной (вместе с платформой,  $v_{\text{пер}} = \omega R$ ) и относительной ( $v_{\text{отн}} = u$ ) скоростей, поэтому

$$v_{\text{абс}} = \omega R + u. \quad (3)$$

Приравняем моменты импульса системы в начальном положении (человек стоит на краю) и промежуточном состоянии (при движении вдоль края вращающейся со скоростью  $\omega$  платформы):

$$\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)R^2\omega_0 = \frac{m_1R^2}{2}\omega + m_2(\omega R + u)R. \quad (4)$$

Из уравнения (4) выражаем угловую скорость  $\omega$  и  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ :

$$\omega = \left(\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)\omega_0 - m_2u/R\right) / \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \Rightarrow \Delta\omega_0 = -\frac{m_2u}{(m_1/2 + m_2)R} < 0. \quad (5)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (5):

$$1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / (1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}) = 1 \text{ с}^{-1}.$$

В рассмотренном случае человек начал двигаться в направлении первоначального вращения платформы, поэтому ее скорость уменьшилась ( $\omega < \omega_0$ ). В противоположном случае, т. е. если скорость  $u$  повернуть на  $180^\circ$ , угловая скорость платформы увеличится.

**Пример 7. Сохранение момента импульса системы при абсолютно неупругом ударе.** Некоторое тело (например, стержень  $AB$  длиной  $l$  и массой  $m_1$ ) может вращаться вокруг вертикальной оси  $z$  (либо горизонтальной оси  $x$ ), имея две опоры  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 7). В точку  $D$  неподвижного стержня на расстоянии  $b$  от оси вращения  $z$  попадает пуля массой  $m_0$ , летящая со скоростью  $v_0$ , которая перпендикулярна оси  $z$  и стержню. Определить угловую скорость  $\omega$ , с которой начнет



вращаться стержень сразу же после неупругого удара (пуля застревает в стержне), а также выделившуюся за время удара тепловую энергию.

Дано:

$m; l; m_0; v_0; b$

Найти:  $\omega; Q$

*Решение.* Поскольку все внешние силы (рис. 7) пересекают ось вращения (реакции опор) либо параллельны ей (силы тяжести), то их моменты относительно этой оси равны нулю, и, следовательно, момент импульса системы стержень – пуля сохраняется при ударе. Приравняв момент импульса системы до и после удара, получим (см. формулы (1.22) и (1.41))

$$m_0 v_0 b = I_z \omega + m_0 v b. \quad (1)$$

Момент инерции стержня определяем по теореме Штейнера:

$$I_z = I_{cz} + m(l/2)^2 = ml^2/12 + ml^2/4 = ml^2/3. \quad (2)$$

Поскольку после удара пуля движется вместе со стержнем, то ее скорость  $v = \omega b$ . Подставив полученные выражения для  $I_z$  и  $v$  в уравнение (1), получим

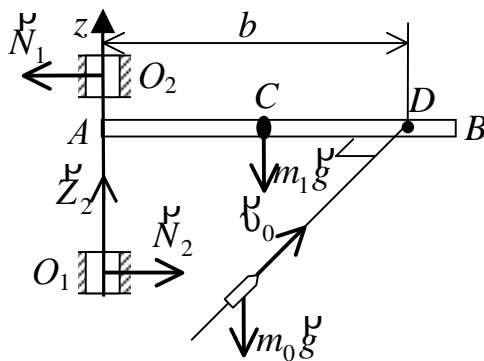


Рис. 7

$$m_0 v_0 b = \frac{1}{3} m l^2 \omega + m_0 \omega b^2, \Rightarrow \omega = \frac{m_0 v_0 b}{(m l^2 / 3) + m_0 b^2}. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (3):

$$1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 1 \text{ м} / (1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2) = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Рассчитав начальную и конечную кинетические энергии системы стержень – пуля, определим ту часть механической энергии, которая в процессе удара перешла в тепловую энергию, т. е.

$$Q = K_0 - K = (m_0 v_0^2 / 2) - I_z^* (\omega^2 / 2), \quad (4)$$

здесь  $I_z^* = I_z + m_0 b^2$  – момент инерции стержня с пулей в точке  $D$ .

**Пример 8. Применение уравнения Бернулли и уравнения непрерывности при изучении движения текучих сред по трубам.** Несжимаемая идеальная среда (невязкая жидкость), находящаяся в широком сосуде (цистерна) с поперечным сечением  $S_1$  (рис. 8), вытекает по узкой трубе с поперечным сечением  $S_2$ , на конце которой установлен кран с поперечным сечением  $S_3 \ll S_1$ . На горизонтальном участке трубы установлены трубки  $a$  и  $b$  для измерения динамического давления потока жидкости. Определить скорости  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , а также разность уровней  $\Delta h$  в трубках  $a$  и  $b$  и давление  $p_2$  в сечении  $S_2$ .

*Дано:*

$S_1; S_2; S_3; H; h$

*Найти:*  $v_1; v_2; v_3; \Delta h; p$

*Решение.* Для изучения движения несжимаемых и невязких сред можно использовать уравнение непрерывности потока (1.53) и уравнение Бернулли (1.54):

$$vS = \text{const}, \quad \rho v^2 / 2 + \rho gh + p = \text{const}. \quad (1)$$

Применим эти уравнения к двум сечениям  $S_1$  и  $S_3$  потока жидкости, в которых давление равно атмосферному. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными ( $v_1$  и  $v_3$ ):

$$v_1 S_1 = v_3 S_3, \quad \rho v_1^2 / 2 + \rho g(H + h) + p_{\text{атм}} = \rho v_3^2 / 2 + p_{\text{атм}}. \quad (2)$$

При решении второго уравнения учтем, что скорость  $v_1$  опускания уровня жидкости в широком сосуде мала ( $v_1 \ll v_3$ ). Тогда получим  $v_3 \cong \sqrt{\rho g(H + h)}$ . Из уравнения непрерывности находим

скорость  $v_1$ :

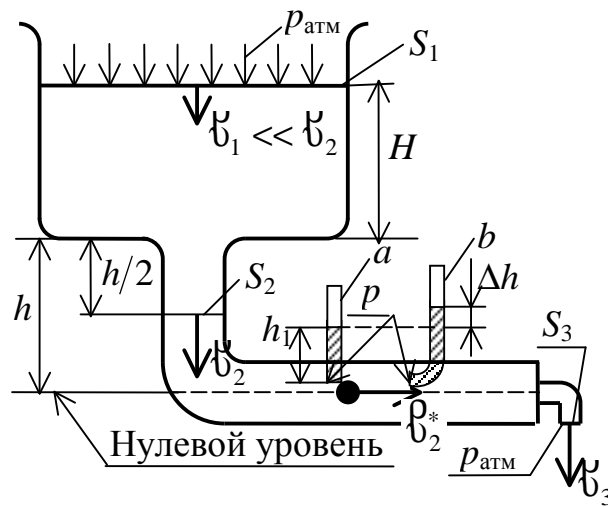


Рис. 8

$$v_1 = S_3 v_3 / S_1 = \sqrt{\rho g (H + h)} S_3 / S_1. \quad (3)$$

Чтобы рассчитать скорость и давление в сечении  $S_2$ , нужно поступить аналогично и записать уравнения для сечений  $S_1$  и  $S_2$  (или  $S_2$  и  $S_3$ ):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad \rho v_1^2/2 + \rho g(H + h) + p_{\text{атм}} = \rho v_2^2/2 + \rho gh/2 + p_2. \quad (4)$$

Из системы (4) следует, что

$$v_2 = v_1 S_1/S_2 = v_3 S_3/S_2 = \sqrt{\rho g(H + h)} S_3/S_2, \quad (5)$$

$$p_2 = p_{\text{атм}} + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gH \cong p_{\text{атм}} + \left( \rho gH + \frac{h}{2} \right) - \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (6)$$

Применяя уравнение Бернулли к двум сечениям жидкости в трубках  $a$  и  $b$ , найдем разность их уровней ( $p$  – давление жидкости в нижних сечениях трубок;  $v_2^* = v_2$ ):

$$\left. \begin{aligned} p &= p_{\text{атм}} + \rho gh_1, \\ \rho v_2^*/2 + p &= \rho g(h_1 + \Delta h) + p_{\text{атм}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta h = \rho v_2^{*2}/2.$$

**Пример 9. Гармонические колебания.** Частица массой  $m = 0,01$  кг совершает гармонические колебания с периодом  $T = 2$  с. Полная энергия колеблющейся частицы  $E = 0,1$  мДж. Определить амплитуду  $A$  колебаний и наибольшее значение силы  $F_{\text{max}}$ , действующей на частицу.

*Дано:*

$m = 0,01$  кг;

$T = 2$  с;

$E = 0,1$  мДж;

*Найти:*  $A$ ;  $F_{\text{max}}$

*Решение.* Для расчета амплитуды колебаний воспользуемся выражением (1.60), которое определяет полную энергию колеблющейся частицы:

$$E = m\omega^2 A^2/2. \quad (1)$$

Подставив в формулу (1) выражение  $\omega = 2\pi/T$ , выразим амплитуду  $A$  и, подставив числовые значения, произведем расчеты:

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм}.$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением  $F = -kx$ , где  $k$  – коэффициент жесткости силы;  $x$  – смещение частицы из положения равновесия. Максимальное значение сила приобретает при максимальном

смещении

$x_{\max} = A$ , т. е.

$$F_{\max} = kA. \quad (3)$$

Коэффициент  $k$  выражается через период колебаний (см. формулу (1.58)):

$$k = m\omega^2 = m4\pi^2/T^2. \quad (4)$$

Подставим в формулу (3) выражения (4) и (2). После сокращений и упрощений получим

$$F_{\max} = m \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{2mE}.$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (5):

$$1 \text{ Н} = \sqrt{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж}} / 1 \text{ с} = \sqrt{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Н} \cdot \text{м}} / 1 \text{ с}^2 = \sqrt{1 \text{ Н}^2} = 1 \text{ Н}.$$

Подставим числовые значения в формулу (5) и проведем вычисления:

$$F_{\max} = 2 \cdot 3,14 / 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН}.$$

**Пример 10. Расчет плотности вероятности и энергии квантовых микрочастиц во внешних полях.** Микрочастица (электрон либо протон) находится в первом возбужденном энергетическом состоянии квантового осциллятора. Частота  $\nu_0$  такого осциллятора равна  $5 \cdot 10^{14}$  Гц. Определить энергию этой микрочастицы и получить выражение для плотности вероятности  $f$  того, что микрочастица имеет координату  $x$ . При вычислении нормировочной постоянной  $A_1$  следует воспользоваться табличным интегралом вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\beta^3}.$$

*Дано:*

$$\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц};$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\beta^3}$$

*Найти:*  $E_1; f_1(x)$

*Решение.*

Воспользуемся выражением (1.95) для спектра энергии квантового осциллятора при  $n = 1$  (первый возбужденный уровень):

$$E_1 = 3\eta\omega_0/2 = 3\eta 2\pi\nu_0/2 = 3h\nu_0/2 =$$

$$= (3/2) \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} =$$

$$= 4,62 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,9 \text{ эВ} \quad (1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}).$$

Запишем выражение (1.94) для волновой функции  $\Psi_1$  квантового осциллятора при  $n = 1$  и ее комплексно-сопряженную функцию  $\Psi_1^*$ :

$$\Psi_1(t, x) = A_1 e^{-iE_1 t / \hbar} x e^{-m\omega_0 x^2 / (2\hbar)}, \quad \Psi_1^*(t, x) = A_1 e^{iE_1 t / \hbar} x e^{-m\omega_0 x^2 / (2\hbar)}. \quad (1)$$

С помощью постулата М. Борна (см. формулу (1.87)) получим выражения для плотности вероятности  $f$ -распределения микрочастицы по координате  $x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ):

$$f = \Psi \Psi^* = A_1^2 x^2 e^{-\beta x^2}, \quad \text{где } \beta = m\omega_0 / \hbar. \quad (2)$$

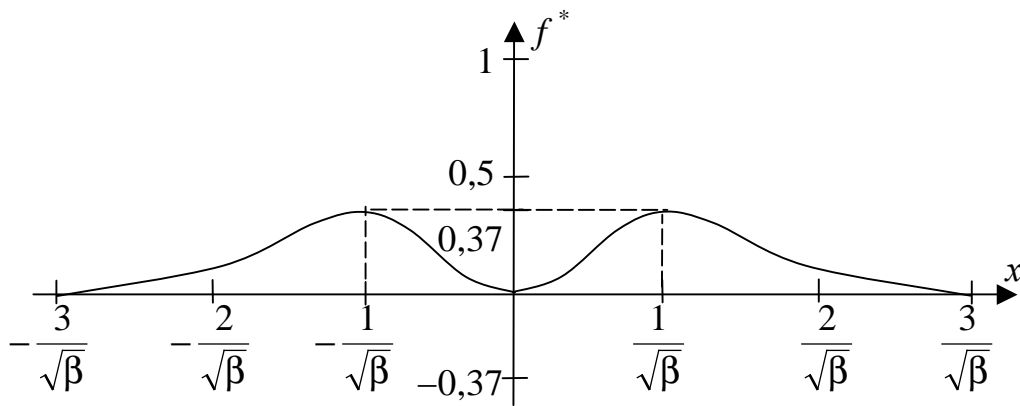


Рис. 9

При использовании общего условия нормировки (1.88) нужно интегрирование по объему для одномерного случая заменить на интегрирование по координате  $x$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow A_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = 1. \quad (3)$$

После вычисления интеграла (см. условие задачи) получим

$$\frac{A_1^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}} = 1 \Rightarrow A_1^2 = 2 \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{m^3 \omega_0^3}{\pi \hbar^3}}. \quad (4)$$

На рис. 9 схематично изображена функция  $f^* = \beta f(x) / A_1^2$ , определяющая вид функции (2) (с учетом выражения (4) для квадрата нормировочной постоянной  $A_1$ )

## 1.5. Задачи к контрольной работе № 1

### Таблица вариантов заданий

**для студентов инженерно-технических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	21	41	51	61	71	81	91
2	2	22	42	52	62	72	82	92
3	3	23	43	53	63	73	83	93
4	4	24	44	54	64	74	84	94
5	5	25	45	55	65	75	85	95
6	6	26	46	56	66	76	86	96
7	7	27	47	57	67	77	87	97
8	8	28	48	58	68	78	88	98
9	9	29	49	59	69	79	89	99
0	10	30	50	60	70	80	90	100

**Таблица вариантов заданий**

**для студентов химико-технологических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	31	41	51	61	81	91
2	2	12	32	42	52	62	82	92
3	3	13	33	43	53	63	83	93
4	4	14	34	44	54	64	84	94
5	5	15	35	45	55	65	85	95
6	6	16	36	46	56	66	86	96
7	7	17	37	47	57	67	87	97
8	8	18	38	48	58	68	88	98
9	9	19	39	49	59	69	89	99
0	10	20	40	50	60	70	90	100

**Тема 1. Кинематика материальной точки  
и твердого тела**

1. Определите скорость  $v$  и полное ускорение  $a$  точки в момент времени  $t = 2$  с, если она движется по окружности радиусом  $R = 1$  м согласно уравнению  $s = At + Bt^3$ , где  $A = 8$  м/с;  $B = -1$  м/с<sup>3</sup>;  $s$  – криволинейная, т. е. дуговая координата, отсчитанная вдоль дуги окружности от некоторой точки на траектории, принятой за начальную.

2. По прямой линии движутся две материальные точки согласно уравнениям:  $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$  и  $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$ , где  $A_1 = 10$  м;  $B_1 = 1$  м/с;  $C_1 = 2$  м/с<sup>2</sup>;  $A_2 = 3$  м;  $B_2 = 2$  м/с;  $C_2 = 1$  м/с<sup>2</sup>. В какой момент времени  $\tau$  скорости этих точек будут одинаковы? Найдите ускорения  $a_1$  и  $a_2$  этих точек.

3. Точка движется по окружности радиусом  $R = 9$  м. В некоторый момент времени нормальное ускорение  $a_n$  точки равно  $4 \text{ м/с}^2$ , вектор полного ускорения  $\vec{a}$  образует в этот момент с вектором нормального ускорения  $\vec{a}_n$  угол  $\alpha = 60^\circ$ . Найдите скорость  $v$  и тангенциальное ускорение  $a_\tau$  точки.

4. Точка движется по прямой согласно уравнению  $x = At + Bt^3$ , где  $A = 6 \text{ м/с}$ ;  $B = -0,125 \text{ м/с}^3$ . Определите среднюю путевую скорость  $\langle v_{\text{ср}} \rangle$  точки в интервале времени от  $t_1 = 2$  с до  $t_2 = 6$  с.

5. Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид  $x = At + Bt^3$ , где  $A = 3 \text{ м/с}$ ;  $B = 0,06 \text{ м/с}^3$ . Найдите скорость  $v$  и ускорение  $a$  точки в моменты времени  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 3$  с. Каковы средние значения скорости  $\langle v_{\text{ср}} \rangle$  и ускорения  $\langle a_{\text{ср}} \rangle$  за первые 3 с движения?

6. Диск радиусом  $R = 0,2$  м вращается согласно уравнению  $\varphi = A + Bt + Ct^3$ , где  $A = 3$  рад;  $B = -1$  рад/с;  $C = 0,1$  рад/с<sup>3</sup>. Определите тангенциальное  $a_\tau$ , нормальное  $a_n$  и полное  $a$  ускорения точек на ободе диска для момента времени  $t_1 = 10$  с.

7. Скорость точки, движущейся по окружности радиусом 4 м, изменяется по закону  $v = At + Bt^2$ , где  $A = 1 \text{ м/с}^2$ ;  $B = 3 \text{ м/с}^3$ . Найдите: 1) путь, пройденный точкой за 6 с после начала движения;

2) тангенциальное и полное ускорения точки в момент времени  $t_1 = 1$  с.

8. Найдите линейную скорость и нормальное ускорение точек поверхности Земли в ее суточном вращении на широте Минска ( $\varphi = 54^\circ$ ,  $\cos 54^\circ = 0,5878$ ). Радиус Земли принять равным 6400 км.

9. Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты падает тело и каково время  $t_1$  его падения?

10. Найдите угловое ускорение  $\epsilon$  колеса, если известно, что через время  $t_1 = 2$  с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с вектором ее линейной скорости.

## **Тема 2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела**



11. С высоты  $h = 2$  м на стальную плиту свободно падает шарик массой  $m = 200$  г и подпрыгивает на высоту  $h_1 = 0,5$  м. Определите изменение  $\Delta p$  импульса шарика при ударе, а также среднюю силу, полученную стенкой при ударе, если длительность удара  $\Delta t = 0,01$  с.

12. Определите импульс  $\Delta \vec{p}$ , полученный стенкой при ударе о нее шарика массой  $m = 300$  г, а также среднюю силу удара, если шарик двигался со скоростью  $v_0 = 8$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к плоскости стенки. Удар о стенку считать упругим. Длительность удара  $\Delta t = 0,02$  с.

13. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены грузы, один из которых ( $m_1 = 400$  г) движется по поверхности стола, а другой ( $m_2 = 600$  г) – вдоль вертикали вниз. Коэффициент трения  $\mu$  груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определите: 1) ускорение  $a$ ; 2) силу натяжения  $T$  нити.

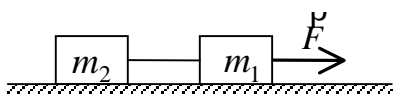


Рис. 10

14. Два груза ( $m_1 = 500$  г и  $m_2 = 700$  г), связанные невесомой и нерастяжимой нитью, лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 10). К грузу  $m_1$  приложена горизонтально направленная сила  $F = 6$  Н. Коэффициент трения грузов о поверхность  $\mu = 0,1$ . Определите: 1) ускорение  $a$  грузов; 2) силу натяжения  $T$  нити.

15. Наклонная плоскость, образующая угол  $\varphi = 25^\circ$  с горизонтом, имеет длину  $l = 2$  м. Тело соскользнуло с этой плоскости за  $t_1 = 2$  с. Определите коэффициент трения  $\mu$  тела о плоскость.

16. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 45^\circ$ . Зависимость пройденного телом пути от времени описывают уравнением  $s = ct^2$ , где  $c = 1,73$  м/с<sup>2</sup>. Определите коэффициент трения  $\mu$  тела о плоскость.

17. Под действием некоторой силы  $\vec{F}$  материальная точка массой  $m = 2$  кг движется прямолинейно согласно уравнению  $x = 2 + 5t$

$+ t^2 - 0,2t^3$ . Найдите значение этой силы в моменты времени  $t_1 = 2$  с и  $t_2 = 5$  с. В какой момент времени  $t_3$  сила равна нулю?

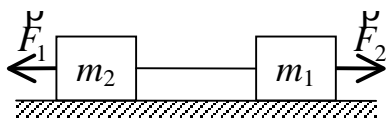


Рис. 11

18. Два тела массами  $m_1 = 4$  кг и  $m_2 = 6$  кг связаны нитью, выдерживающей натяжение  $T = 16$  Н (рис. 11). К телам приложены силы  $F_1 = 2kt$  и  $F_2 = kt$  (коэффициент  $k = 0,1$  Н/с;  $t$  – время).

Определите, в какой момент времени нить порвется. Трением пренебречь.

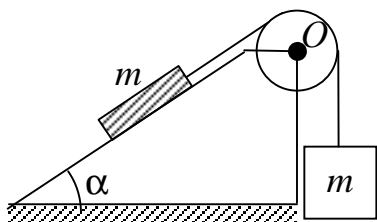


Рис. 12

19. В установке угол  $\alpha$  наклона плоскости с горизонтом равен  $30^\circ$ , массы тел одинаковы и равны  $m = 1$  кг (рис. 12). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите силу давления на ось, если коэффициент трения  $\mu$  между наклонной плоскостью и движущимся по ней телом равен 0,1.

20. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы  $m_1 = 1,5$  кг и  $m_2 = 3$  кг. Каково будет показание  $T$  весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

### ***Тема 3. Динамика поступательного и вращательного движений твердого тела***

21. На обод маховика диаметром  $d = 60$  см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой  $m = 2$  кг. Определите осевой момент инерции  $I_x$  маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время  $t_1 = 3$  с приобрел угловую скорость  $\omega_1 = 9$  рад/с.

22. Нить с привязанными к ее концам грузами массой  $m_1 = 50$  г и  $m_2 = 60$  г перекинута через блок диаметром  $d = 4$  см. Определите осевой момент инерции блока, если он вращается с угловым ускорением  $\varepsilon = 1,5$  рад/с<sup>2</sup>.

23. Стержень массой  $m = 0,3$  кг и длиной  $l = 40$  см вращается вокруг оси, проходящей через его середину согласно уравнению  $\varphi = At$

+

+  $Bt^3$ , где  $B = 0,2 \text{ рад/с}^3$ . Определите вращающий момент  $M$ , действующий на стержень в момент времени  $t_1 = 2 \text{ с}$ .

24. По горизонтальной плоской поверхности катится без скольжения диск со скоростью  $v_0 = 8 \text{ м/с}$ . Определите эффективный коэффициент  $\mu$  силы сопротивления ( $F_c = \mu N$ ), приложенной к центру диска, если он, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя равнозамедленно путь  $s = 18 \text{ м}$ .

25. Определите момент силы  $M$ , который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой  $n_0 = 12 \text{ с}^{-1}$ , чтобы он при равнозамедленном торможении остановился в течение времени  $\Delta t = 8 \text{ с}$ . Диаметр блока  $d = 30 \text{ см}$ . Массу блока  $m = 6 \text{ кг}$  считать равномерно распределенной по ободу.

26. Блок, имеющий форму диска массой  $m = 0,4 \text{ кг}$ , вращается под действием сил натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами  $m_1 = 0,3 \text{ кг}$  и  $m_2 = 0,7 \text{ кг}$ . Определите силы  $T_1$  и  $T_2$  натяжения нити по обе стороны блока.

27. К ободу однородного сплошного диска массой  $m = 10 \text{ кг}$ , насаженного на ось, приложена касательная сила  $F = 30 \text{ Н}$ . Определите радиус  $R$  диска, если через время  $t_1 = 4 \text{ с}$  после начала действия силы угловая скорость  $\omega_1$  стала равной  $240 \text{ рад/с}$ .

28. К ободу однородного сплошного диска радиусом  $R = 0,5 \text{ м}$  приложена постоянная касательная сила  $F = 100 \text{ Н}$ . При вращении диска на него действует момент сил трения  $M_{\text{тр}} = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Определите массу  $m$  диска, если известно, что его угловое ускорение  $\epsilon$  постоянно и равно  $\epsilon = 16 \text{ рад/с}^2$ .

29. На барабан радиусом  $R = 0,5 \text{ м}$  намотан шнур, к концу которого привязан груз массой  $m = 10 \text{ кг}$ . Найдите осевой момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением  $a = 2,04 \text{ м/с}^2$ .

30. Вентилятор вращается с частотой  $n_0 = 10 \text{ об/мин}$ . После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Найдите осевой момент инерции вентилятора, если момент сил торможения равен  $9,4 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

#### **Тема 4. Законы сохранения импульса и энергии механической системы**

31. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью  $v_0 = 400$  м/с, разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40% от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью  $v_1 = 200$  м/с. Определите скорость  $v_2$  большого осколка.

32. В подвешенный на нити длиной  $l = 1,8$  м деревянный шар массой  $m_1 = 8$  кг попадает горизонтально летящая пуля массой  $m_2 = 4$  г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол  $\alpha = 3^\circ$ ? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.

33. На подножку вагонетки массой  $m_0$ , которая движется прямолинейно со скоростью  $v_0$ , прыгает человек массой  $m$  в направлении, перпендикулярном ходу вагонетки. Определите скорость вагонетки вместе с человеком.

34. Шар массой  $m = 1$  кг, катящийся без скольжения по сильно шероховатой поверхности, ударяется о стену и отскакивает от нее. Скорость центра шара до удара  $v_1 = 10$  м/с, после удара –  $v_2 = 8$  м/с. Найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.

35. Снаряд массой  $m_1 = 29$  кг, летевший горизонтально, попадает в платформу с песком массой  $m_2 = 10\,000$  кг и застревает в песке.

С какой скоростью летел снаряд, если платформа начала двигаться со скоростью  $v_2 = 1$  м/с?

36. При горизонтальном полете со скоростью  $v_0 = 250$  м/с снаряд массой  $m = 8$  кг разорвался на две части. Большая часть массой  $m_1 = 6$  кг получила скорость  $v_1 = 400$  м/с в направлении полета снаряда. Определите абсолютное значение и направление скорости  $v_2$  меньшей части снаряда.

37. Шар массой  $m_1 = 4$  кг движется со скоростью  $v_1 = 5$  м/с и сталкивается с шаром массой  $m_2 = 6$  кг, который движется ему навстречу со скоростью  $v_2 = 2$  м/с. Считая удар прямым центральным, а шары однородными абсолютно упругими, найдите проекции их скоростей после удара на ось  $x$ , направленную вдоль вектора  $v_1$ .

38. Вагон массой  $m = 30$  т движется на упор (стенку) со скоростью  $v_0 = 0,2$  м/с. При полном торможении вагона (в момент его

остановки) буферные пружины вагона сжимаются на  $\Delta l = 12$  см. Определите максимальную силу  $F_{\max}$  сжатия пружин.

39. Шар массой  $m_1 = 5$  кг движется со скоростью  $v_1 = 1$  м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой  $m_2 = 3$  кг. Определите скорости  $u_1$  и  $u_2$  шаров после удара. Шары считать однородными, абсолютно упругими, удар – прямым центральным.

40. Стальная пуля массой  $m = 10$  г, имеющая скорость  $v_0$ , пробивает подвешенный на тонкой нити свинцовый шар массой  $M = 0,1$  кг, в результате чего скорость пули уменьшается вдвое. Какая часть начальной кинетической энергии пули пошла на нагревание?

### ***Тема 5. Законы сохранения момента импульса и энергии***

41. Горизонтальная платформа массой  $m_1 = 120$  кг вращается с частотой  $n_1 = 6$  об/мин. Человек массой  $m_2 = 80$  кг стоит на краю платформы. С какой частотой  $n_2$  начнет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Платформу принять за однородный диск, а человека считайте материальной точкой.

42. Тонкий стержень длиной 0,5 м и массой 1 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс стержня. Симметрично оси вращения на расстоянии  $d = 10$  см от нее на стержне расположены два небольших груза массой по  $m = 0,2$  кг каждый. Угловая скорость вращения  $\omega_1 = 2$  рад/с. Чему будет равна угловая скорость  $\omega_2$ , если под действием внутренних сил грузы переместить на концы стержня?

43. Вертикально расположенный стержень массой  $m = 2$  кг и длиной  $l = 1$  м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. В конец стержня попадает пуля массой  $m_2 = 10$  г, летящая перпендикулярно оси и стержню со скоростью  $v = 500$  м/с. Определите угловую скорость, с которой начнет вращаться стержень, если пуля застрянет в нем.

44. Вертикально расположенный стержень длиной  $l = 1$  м и массой  $m_1 = 1$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В другой конец стержня попадает летящая горизонтальная пуля массой  $m_2 = 5$  г и застревает в нем. Найдите первоначальную кинетическую энергию пули, если стержень отклонился на  $60^\circ$ .

45. Вертикально расположенный стержень длиной  $l = 1$  м и

массой  $m_1 = 5$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В другой конец стержня попадает пуля массой  $m_2 = 5$  г, летящая со скоростью  $v = 500$  м/с перпендикулярно оси и стержню, и застревает в нем. Определите угловую скорость  $\omega_1$  стержня после попадания в него пули.

46. Горизонтально расположенный деревянный стержень массой  $m_1 = 0,8$  кг и длиной  $l = 1,8$  м может вращаться вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нем пуля массой  $m_2 = 3$  г, летящая перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью  $v_2 = 50$  м/с. Определите угловую скорость  $\omega$ , с которой начинает вращаться стержень.

47. Решите предыдущую задачу, заменив пулю пластмассовым шариком той же массы и движущимся с той же скоростью. Удар считайте абсолютно упругим. Определите угловую скорость  $\omega$  стержня и скорость  $u$  шарика сразу же после удара.

48. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом  $R = 2$  м, стоит человек. Масса платформы  $M = 200$  кг, масса человека  $m = 80$  кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найдите, с какой угловой скоростью  $\omega$  будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью  $u = 2$  м/с относительно платформы.

49. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью  $\omega_1 = 1$  рад/с. С какой угловой скоростью  $\omega_2$  будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный осевой момент инерции человека и скамейки  $I = 6$  кг·м<sup>2</sup>. Длина стержня  $l = 2,4$  м, его масса  $m = 8$  кг. Считать, что центр тяжести стержня с человеком находится на оси платформы.

50. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой  $n_1 = 8$  мин<sup>-1</sup>, стоит человек массой  $m_1 = 70$  кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой  $n_2 = 10$  мин<sup>-1</sup>. Определите массу  $m_2$  платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

## **Тема 6. Движение жидкостей и газов**

51. Найдите скорость  $v$  течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время  $t = 30$  мин через поперечное сечение трубы протекает газ массой  $m = 0,51$  кг. Плотность газа  $\rho = 7,5$  кг/м<sup>3</sup>, диаметр трубы  $d = 2$  см. Газ считать идеальным, несжимаемым.

52. В дне цилиндрического сосуда диаметром  $D = 0,5$  м имеется малое круглое отверстие диаметром  $d = 1$  см. Найдите зависимость скорости  $v$  понижения уровня воды в сосуде от высоты  $h$  этого уровня. Найдите значение этой скорости для высоты  $h = 0,2$  м. Примите во внимание, что при  $D \gg d$  скорость  $v$  будет много меньше, чем скорость вытекания воды из малого отверстия.

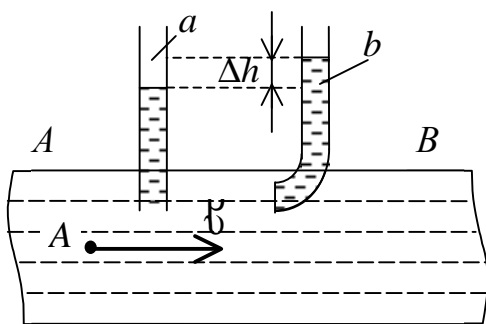


Рис. 13

53. В сосуд льется вода, причем за единицу времени наливается объем воды  $V_1 = 0,2$  л/с. Каким должен быть диаметр  $d$  малого отверстия в дне широкого сосуда, чтобы вода в нем поддерживалась на постоянном уровне  $h = 8,3$  см?

54. Какое давление  $p$  создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вытекает из него через малое отверстие со скоростью  $v = 25$  м/с? Плотность краски  $\rho = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

55. По горизонтальному участку трубы  $AB$  течет жидкость (рис. 13).

В трубках  $a$  и  $b$  разность уровней этой жидкости  $\Delta h = 10$  см. Диаметры трубок  $a$  и  $b$  одинаковы. Найдите скорость  $v$  течения жидкости в трубе  $AB$ .

56. Насосная станция города поддерживает в трубах водопровода на уровне первого этажа давление 5 атм. Определите (пренебрегая трением при течении жидкости) скорость струи воды, вытекающей из крана на первом, втором и третьем этажах, если краны каждого последующего этажа расположены на 4 м выше. На какой этаж вода по водопроводу уже не поднимется?

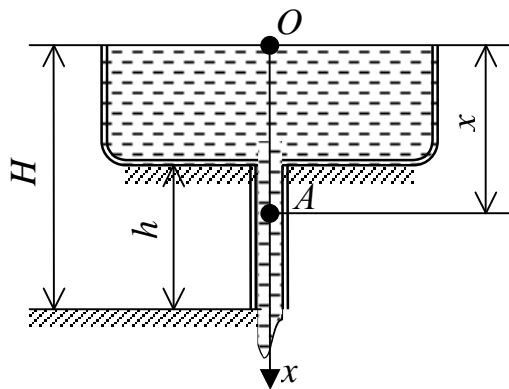


Рис. 14

57. Сосуд с водой подвешен к потолку. Высота воды в сосуде  $h$ . На сколько изменится натяжение подвеса, если в днище сосуда открыть маленькое отверстие, из которого вытекает струя с поперечным сечением  $S$ ? Плотность воды  $\rho$ .

58. Из широкого сосуда через узкую цилиндрическую трубку длиной  $h$  вытекает несжимаемая жидкость плотности  $\rho$  (рис. 14). Как зависит давление  $p$  и скорость  $v$  жидкости в сосуде и трубке от положения точки  $A$  с координатой  $x$ ? Давление воздуха  $p_0$ .

59. Бак с площадью основания  $S_1 = 10 \text{ м}^2$  и объемом  $100 \text{ м}^3$  заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определите время  $T$ , необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось малое отверстие площадью  $S_2 = 8 \text{ см}^2$ .

60. Бак высотой  $H = 1,5 \text{ м}$  наполнен до краев водой. На расстоянии  $h = 1 \text{ м}$  от верхнего края бака образовалось отверстие малого диаметра. На каком расстоянии  $b$  от бака падает на пол струя, вытекающая из отверстия?

### **Тема 7. Гармонические колебания**

61. Определите возвращающую силу  $F_1$  в момент времени  $t_1 = 0,25 \text{ с}$  и полную энергию  $E_1$  точки массой  $m = 20 \text{ г}$ , совершающей гармонические колебания согласно уравнению  $x = A \sin \omega t$ , где  $A = 15 \text{ см}$ ;  $\omega = 4\pi \text{ с}^{-1}$ .

62. Определите период  $T_0$  колебаний стержня массой  $m$  длиной  $l = 30 \text{ см}$  вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец.

63. Определите максимальное ускорение  $a_{\max}$  материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой  $A = 15 \text{ см}$ , если наибольшая скорость точки  $v_{\max} = 30 \text{ см/с}$ .

64. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых  $x = A \sin \omega t$ , где  $A = 40 \text{ см}$ ;  $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$ . В момент времени  $t_1$ , когда на точку действовала возвращающая сила  $F_1 = 5 \text{ мН}$ , точка имела потенциальную энергию  $\Pi_1 = 0,1 \text{ мДж}$ . Найдите этот момент времени  $t_1$ .

65. Определите частоту  $\nu_0$  гармонических колебаний диска с радиусом  $R = 20 \text{ см}$  относительно горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.



66. Определите период  $T_0$  гармонических колебаний диска радиусом  $R = 40$  см относительно горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

67. На невесомом стержне длиной  $l = 30$  см укреплены два одинаковых груза: один в середине стержня, другой – на одном из его концов. Стержень с грузами колеблется относительно горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определите приведенную длину  $l_{пр}$  маятника и период  $T_0$  гармонических колебаний.

68. Найдите максимальную кинетическую энергию  $K_{max}$  материальной точки массой  $m = 2$  г, совершающей гармонические колебания с амплитудой  $A = 4$  см и частотой  $\nu = 5$  Гц.

69. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых  $x = A_1 \sin \omega_1 t$  и  $y = A_2 \cos \omega_2 t$ , где  $A_1 = 8$  см;  $A_2 = 4$  см;  $\omega_1 = \omega_2 = 2 \text{ с}^{-1}$ . Получите уравнение траектории и постройте ее на чертеже; укажите направление движения точки по этой траектории.

70. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода:  $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$  и  $x_2 = A_1 \sin \omega_2(t + \tau)$ , где  $A_1 = A_2 = 3$  см;  $\omega_1 = \omega_2 = \pi \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau = 0,5$  с. Определите амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\phi_0$  результирующего колебания. Напишите его уравнение.

### ***Тема 8. Задачи смешанного типа, требующие использования дифференциального и интегрального исчисления***

71. Твердое тело замедленно вращается вокруг неподвижной оси с угловым ускорением  $\varepsilon = -k\sqrt{\omega}$ , где  $k$  – положительная постоянная;  $\omega$  – угловая скорость. В начальный момент времени его угловая скорость  $\omega_0$ . Найдите среднюю угловую скорость за время, в течение которого тело будет вращаться.

72. Пуля, пробив доску толщиной  $h$ , изменила свою скорость от  $v_0$  до  $v$ . Найдите время  $T$  движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости пули.

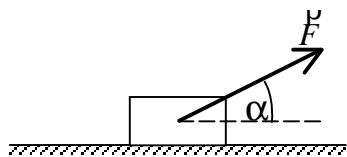


Рис. 15

73. Под каким углом  $\alpha$  нужно тянуть за веревку тяжелый ящик, чтобы с наименьшим усилием передвигать его волоком по горизонтальной поверхности с заданным постоянным ускорением  $a$  (рис. 15)? Коэффициент трения

равен  $\mu$ . Чему равна при этом сила  $F$ , т. е. ее минимальное возможное значение?

74. Цепочка массой  $m = 1$  кг и длиной  $l = 14$  м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найдите полный импульс  $p$ , который она передала столу.

75. Какую работу нужно совершить, чтобы длинную доску, лежащую на земле, повернуть в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов на угол  $\alpha$ ? Длина доски  $l$ , масса  $m$ , коэффициент трения между доской и землей  $\mu$ .

76. Определите минимальную работу, которую нужно затратить, чтобы насыпать из песка (набирая его малыми порциями с поверхности земли) конус, радиус которого  $R = 12$  м, а высота  $h = 10$  м. Плотность песка  $\rho = 2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

77. Какую минимальную работу  $A$  требуется совершить, чтобы вырыть прямоугольную яму площадью основания  $S$  и глубиной  $H$ , считая, что выбираемый из ямы малыми порциями грунт поднимается до уровня  $H = 0$ . Плотность грунта  $\rho$ .

78. Маховик, масса которого 6 кг равномерно распределена по ободу радиусом 18 см, вращается на валу с частотой  $n_0 = 600$  мин<sup>-1</sup>. Под действием тормозящего момента  $M = 10 + 0,1\omega$  (в Н·м) маховик останавливается. Найдите зависимость угловой скорости и время торможения.

79. Стержень длиной  $l = 50$  см совершает колебания относительно горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , находящуюся на расстоянии  $b$  от центра масс стержня. Определите период колебаний стержня как функцию от расстояния  $b$ , а затем найдите минимальное значение периода  $T_0$  и соответствующее ему значение  $b_0$ .

80. Используя выражение для амплитуды  $A$  вынужденных колебаний (см. формулу (1.65)), зависящей от частоты  $p$  вынуждающей внешней периодической силы, определите ее максимальное значение. Как называется частота колебаний с максимально возможной амплитудой?

### **Тема 9. Упругие волны и их характеристики**

81. Коэффициенты сжимаемости  $k$  ртути, воды и воздуха соответственно равны  $3 \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>;  $5 \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup> и  $0,71 \cdot 10^{-5}$  Па<sup>-1</sup>, а

плотности –  $13,6 \text{ г/см}^3$ ;  $1 \text{ г/см}^3$  и  $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ . Определите скорости звуковых волн в этих средах.

82. Определите скорости продольных  $v_{\parallel}$  и поперечных  $v_{\perp}$  упругих волн в золоте. Плотность золота  $\rho = 19,3 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $E = 7,8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , модуль сдвига  $G = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

83. В однородной среде распространяется плоская упругая волна, описываемая уравнением  $s = a \exp(-\gamma x) \cos(\omega t - kx)$ . Положив длину волны  $\lambda = 0,1 \text{ м}$  и  $\gamma = 0,1 \text{ м}^{-1}$ , найдите разность фаз  $\Delta\phi$  в точках, для которых отношение амплитуд  $A$  смещения частиц среды  $\eta = A_1/A_2 = 1,01$ .

84. Покоящийся источник испускает по всем направлениям звуковую волну с длиной, равной  $\lambda_0$ . Как изменится длина волны, регистрируемая неподвижным приемником, если источник привести в движение в направлении к приемнику со скоростью, равной половине скорости звука?

85. По прямому шоссе едет со скоростью  $v_1 = 60 \text{ км/ч}$  легковой автомобиль. Его догоняет движущаяся со скоростью  $v_2 = 90 \text{ км/ч}$  специальная автомашина с включенным звуковым сигналом частоты  $\nu_0 = 1 \text{ кГц}$ . Сигнал какой частоты  $\nu$  будут слышать пассажиры автомобиля? Скорость звука  $v$  считать равной  $340 \text{ м/с}$ .

86. Определите уровень громкости звука  $L = \lg(I/I_0)$ , создаваемого в воздухе упругой волной  $s = A \cos(\omega t - kx)$ , где  $A = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ;  $\omega = 6280 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 18,5 \text{ м}^{-1}$ . Интенсивность  $I_0$ , соответствующая порогу слышимости, равна  $10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ ; плотность воздуха  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$ .

87. Упругая волна  $s = A \cos \omega(t - x/v)$  распространяется в воде. Определите среднее значение плотности энергии волны и волновой поток энергии через отверстие площадью  $S$  в экране, установленном параллельно плоскому фронту волны ( $S = 0,3 \text{ м}^2$ ). Амплитуда  $A = 10^{-4} \text{ м}$ ; частота  $\nu = 10^3 \text{ Гц}$ ; длина волны  $\lambda = 1,48 \text{ м}$ .

88. Волновой пакет состоит из двух поверхностных волн на воде, которые распространяются в одном направлении с близкими фазовыми скоростями ( $v_1 = 24 \text{ см/с}$ ;  $v_2 = 25 \text{ м/с}$ ). Их волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  равны  $3,92 \text{ см}^{-1}$  и  $3,69 \text{ см}^{-1}$  соответственно. Рассчитайте групповую скорость этого пакета, используя средние значения фазовой скорости  $v$  и длины волны  $\lambda$ .

89. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью  $v = 25$  м/с. Период колебаний  $T = 0,02$  с. Запишите уравнение этой волны и найдите разность фаз колебаний двух точек среды, находящихся на указанной прямой на расстоянии  $x = 30$  см друг от друга.

90. Уравнение плоской волны, распространяющейся в упругой среде, имеет вид  $s = 1 \cdot 10^{-8} \sin(6280t - 1,256x)$ . Определите длину волны  $\lambda$ , скорость  $v$  ее распространения и плотность  $w$  энергии.

### **Тема 10. Элементы релятивистской и квантовой механики**

91. Свободный электрон, пройдя определенную ускоряющую разность потенциалов, движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , равной 1% от скорости света в вакууме. Определите его корпускулярные ( $m$ ,  $p$ ,  $E$ ,  $K$ ) и волновые ( $\omega$ ,  $k$  и  $\lambda$ ) характеристики. Пользуясь формулой Эйлера ( $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi$ ), запишите выражения для действительной  $\psi_1$  и мнимой  $\psi_2$  частей волновой функции  $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$  этого электрона. Чему будет равна дебройлевская длина волны, если скорость электрона станет равной 90% от скорости света?

92. Свободный протон, пройдя определенную ускоряющую разность потенциалов, движется вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , равной 5% от скорости света в вакууме. Определите его корпускулярные ( $m$ ,  $p$ ,  $K$ ,  $E$ ) и волновые ( $\omega$ ,  $k$  и  $\lambda$ ) характеристики. Пользуясь формулой Эйлера ( $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi$ ), запишите выражения для действительной  $\psi_1$  и мнимой  $\psi_2$  частей волновой функции  $\Psi = \psi_1 + i\psi_2$  этого электрона. Как изменится дебройлевская длина волны, если скорость протона станет равной 95% от скорости света?

93. Электрон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L = 0,1$  нм. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что электрон в основном энергетическом состоянии ( $n = 1$ ) имеет координату  $x$ . Постройте график функции  $f = f(x)$  в интервале  $0 \leq x \leq L$ . При каком значении  $n$  энергия электрона в потенциальной яме будет равна его энергии покоя?

94. Электрон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L = 0,2$  нм. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что электрон в первом возбужденном энергетическом состоянии ( $n = 2$ ) имеет координату  $x$ . Постройте график функции  $f = f(x)$  в интервале  $0 \leq x \leq L$ . При каком значении  $n$

энергия электрона в потенциальной яме будет равна половине его энергии покоя?

95. Протон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L = 0,1$  нм. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что электрон в основном энергетическом состоянии ( $n = 1$ ) имеет координату  $x$ . Постройте график функции  $f = f(x)$  в интервале  $0 \leq x \leq L$ . При каком значении  $n$  энергия протона в потенциальной яме будет равна его энергии покоя?

96. Протон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L = 0,2$  нм. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что электрон в первом возбужденном энергетическом состоянии ( $n = 2$ ) имеет координату  $x$ . Постройте график функции  $f = f(x)$  в интервале  $0 \leq x \leq L$ . При каком значении  $n$  энергия протона в потенциальной яме будет равна половине его энергии покоя?

97. Электрон как квантовый осциллятор с частотой  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$  Гц находится в основном, т. е. невозбужденном, состоянии. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что он имеет координату  $x$ . При вычислении нормировочной постоянной  $A_0$  воспользуйтесь интегралом Пуассона: 
$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta}.$$

Постройте график зависимости  $f = f(x)$  в интервале от  $-3/\sqrt{\beta}$  до  $+3/\sqrt{\beta}$ . Какую долю в процентах от энергии покоя электрона составляет энергия основного состояния?

98. Протон как квантовый осциллятор с частотой  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14}$  Гц находится в основном, т. е. невозбужденном, состоянии. Получите выражение для плотности вероятности  $f$  того, что он имеет координату  $x$ . При вычислении нормировочной постоянной  $A_0$  воспользуйтесь интегралом Пуассона: 
$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\pi/\beta}.$$

Постройте график зависимости  $f = f(x)$  в интервале от  $-3/\sqrt{\beta}$  до  $+3/\sqrt{\beta}$ . Какую долю в процентах от энергии покоя протона составляет энергия основного состояния?

99. Электрон как квантовая частица с энергией  $E = 1,5$  эВ движется навстречу прямоугольному потенциальному барьеру высотой  $U_0 = 1,2$  эВ и шириной  $L = 0,1$  нм. Рассчитайте коэффициент

прозрачности  $D$  и поясните его физический смысл. Определите дебройлевскую длину волны этого электрона. Во сколько раз энергия покоя электрона отличается от заданной энергии  $E$ ?

100. Протон как квантовая частица с энергией  $E = 1,3$  эВ движется навстречу прямоугольному потенциальному барьеру высотой  $U_0 = 1,5$  эВ и шириной  $L = 0,1$  нм. Рассчитайте коэффициент прозрачности  $D$  и поясните его физический смысл. Определите дебройлевскую длину волны этого протона. Во сколько раз энергия покоя протона отличается от заданной энергии  $E$ ?

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2\*

### 2.1. Содержание учебной программы по разделу «Основы молекулярной физики и термодинамики» (для инженерно-технических специальностей)

**1. Термодинамические параметры и их молекулярно-кинетическое истолкование.** Идеальный газ. Давление, основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Температура, газовый термометр. Уравнение Менделеева – Клапейрона. Молекулярно-кинетический смысл температуры. Уравнение состояния вещества. Внутренняя энергия и способы ее изменения. Теплоемкость.

**2. Равновесные свойства газов.** Энергия теплового движения многоатомной молекулы. Внутренняя энергия идеального газа, классическая теория теплоемкости и ее ограниченность, объяснение температурной зависимости теплоемкости на основе квантовомеханических представлений. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы реального газа. Критические параметры.

**3. Статистические распределения.** Вероятность, средние значения, флуктуации. Вычисление средних величин с использованием функций распределения. Закон Максвелла для распределения молекул по скоростям и энергиям теплового движения. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Ультразреженные газы. Закон Больцмана для распределения частиц в потенциальном поле. Барометрическая формула.

**4. Явления переноса.** Равновесные и неравновесные процессы. Время релаксации. Опытные законы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения. Молекулярно-кинетическая теория этих явлений. Статистический вес макроскопических состояний. Неравновесные процессы как переход к более вероятным состояниям. Больцмановское определение энтропии. Принцип возрастания энтропии.

**5. Основы термодинамики.** Первый закон термодинамики.

---

\* Материал этой работы подготовлен Кленицким Д. В. и Мадьяровым В. Р.

Вычисление работы и теплоты равновесных процессов. Изопроцессы. Термодинамика изохорного, изобарного, изотермического процессов. Приведенное количество теплоты. Вычисление изменения энтропии. Уравнения адиабатного процесса. Циклические процессы как основа работы тепловых машин. Тепловые двигатели, тепловые насосы, холодильные машины. Идеальная тепловая машина Карно и ее КПД. Обратимые и необратимые процессы. Второй закон термодинамики. Влияние необратимых процессов на КПД. Третий закон термодинамики. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля – Томсона. Фазовые переходы первого и второго рода. Особенности жидкого и твердого состояний вещества.

## **2.2. Содержание учебной программы по разделу «Основы термодинамики и молекулярной физики» (для химико-технологических специальностей)**

**1. Введение.** Молекулярно-кинетический и термодинамический методы исследования вещества, их особенности и взаимодополняемость. Основные понятия термодинамики. Термодинамические параметры. Равновесные состояния и процессы. Опытные газовые законы. Внутренняя энергия система как функция ее состояния. Работа и теплота. Работа газа при изменении его объема. Основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ) и их опытное обоснование.

**2. Законы термодинамики и их использование.** Первый закон (начало) термодинамики. Применение первого закона термодинамики к исследованию изопроцессов идеального газа. Теплоемкость тел. Зависимость теплоемкости от вида процесса. Формула Майера для идеального газа. Адиабатный процесс. Уравнение адиабаты в переменных  $(p, V)$ ,  $(V, T)$  и  $(p, T)$ . Работа при адиабатном процессе. Политропы. Обратимые и необратимые процессы. Круговые процессы (циклы). Тепловые двигатели и насосы, холодильные установки. Термический КПД прямого цикла и холодильный коэффициент обратного цикла. Цикл Карно. Второе начало термодинамики для обратимых и необратимых процессов. Энтропия. Выражение для изменения энтропии идеального газа. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики (теорема Нернста). Термодинамические функции равновесного состояния системы: химический потенциал, энтальпия, свободная энергия, потенциал Гиббса.



### **3. Основные положения молекулярно-кинетической теории.**

Средняя (арифметическая) и средняя квадратичная скорости. Опыт Штерна. Эффективный диаметр молекулы. Средняя длина свободного пробега и среднее число столкновений. Понятие о вакууме. Основное уравнение МКТ и его сопоставление с уравнением Клапейрона – Менделеева. Молекулярно-кинетическое толкование температуры. Число степеней свободы молекул. Теорема Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа. Сравнение выводов классической теории теплоемкостей газов с экспериментом. Объяснение зависимости теплоемкости многоатомных газов от температуры на основе квантовых представлений.

**4. Основы статистической физики.** Микро- и макросостояния. Статистический вес. Статистический смысл энтропии. Функции распределения классических и квантовых систем. Формула Больцмана. Распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла). Барометрическая формула. Распределение молекул по координатам во внешнем силовом поле (распределение Больцмана). Понятие о квантовых функциях распределения Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна.

**5. Реальные газы, жидкости и твердые тела.** Взаимодействие атомов и молекул простых веществ. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы Ван-дер-Ваальса и их сравнение с изотермами реального газа. Критическое состояние. Фазовые равновесия и их превращения. Правило фаз Гиббса. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода. Фазовые диаграммы. Тройная точка. Внутренняя энергия и энтропия реальных газов. Эффект Джоуля – Томсона. Сжижение газов. Свойства и молекулярное строение жидкостей. Поверхностное натяжение на границе жидкость – газ. Явление смачивания. Формула Лапласа. Капиллярные явления. Твердые тела. Кристаллические и аморфные твердые тела. Моно- и поликристаллы. Дефекты в кристаллах. Теплоемкость твердых тел. Классическая теория теплоемкости. Понятие о квантовых моделях теплоемкости А. Эйнштейна и П. Дебая. Свойства вещества в окрестности фазовых переходов. Нормальные и аномальные вещества. Диаграмма жидкого гелия. Уравнения равновесия фаз и уравнение Клапейрона – Клаузиуса. Аморфные тела. Полимеры. Структурные формы полимерных молекул. Виды теплового движения молекул. Аморфность и кристалличность полимеров. Физические состояния и релаксационные

переходы полимеров.

**6. Явления переноса.** Явления переноса в термодинамических неравновесных системах как переход к более вероятным макросостояниям. Общая характеристика явлений диффузии, теплопроводности, вязкости. Экспериментальные законы переноса (Фика, Фурье, Ньютона). Молекулярно-кинетическая теория явлений переноса в газах. Особенности явлений переноса в жидкостях и твердых телах.

## 2.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения

### Тема 1. Уравнение состояния идеального и реального газов

1. Уравнение состояния идеального газа (*Клапейрона – Менделеева*)

$$pV = \nu RT \Rightarrow p = \rho RT / M \Rightarrow p = nkT, \quad (2.1)$$

где  $p$  – давление;  $V$  – объем газа;  $\nu = m/M$  – количество вещества в молях ( $m$  и  $M$  – масса и молярная масса газа);  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура;  $\rho = m/V$  – плотность газа;  $n = N/V$  – концентрация молекул.

Соотношение между плотностью  $\rho$  и концентрацией  $n$

$$\rho = m/V = m_0 N/V \Rightarrow \rho = m_0 n, \text{ где } m_0 \text{ – масса молекулы.} \quad (2.2)$$

2. Уравнение состояния реального газа

$$(p + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT \text{ – уравнение Ван-дер-Ваальса,} \quad (2.3, a)$$

где  $b \approx 4N_A V_0$ ;  $N_A$  – число Авогадро;  $V_0$  – собственный объем одной молекулы.

*Критические термодинамические параметры* реального газа:

$$p_{кр} = a/(27b^2), \quad V_{кр} = 3b\nu, \quad T_{кр} = 8a/(27bR). \quad (2.3, б)$$

*Закон Дальтона* для смеси газов ( $p_j$  – парциальное давление)

$$p = \sum p_j; \quad j = 1, 2, \dots \text{ – номер компонентов смеси.} \quad (2.4)$$

*Приведенная форма уравнения Ван-дер-Ваальса*

$$\left( \frac{p}{p_{кр}} + \frac{3V_{кр}^2}{V^2} \right) \left( \frac{3V}{V_{кр}} - 1 \right) = \frac{8T}{T_{кр}}. \quad (2.5)$$

### Тема 2. Энергия и теплоемкость идеальных и реальных систем

3. Средняя энергия теплового, т. е. хаотического движения молекулы, приходящаяся на одну поступательную или вращательную степень свободы

$$\epsilon_0 = kT/2 - \text{закон Больцмана, } k - \text{постоянная Больцмана.} \quad (2.6)$$

Средняя энергия молекулы, имеющей  $i$  степеней свободы

$$\epsilon = i\epsilon_0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}}. \quad (2.7)$$

4. Внутренняя энергия  $U$  для  $\nu$  молей идеального газа ( $R = k N_A$ )

$$U = N\epsilon = \nu iRT/2 \Rightarrow U = \nu C_V^{\text{мол}} T. \quad (2.8, \text{а})$$

Внутренняя энергия  $U$  для  $\nu$  молей реального газа

$$U = \nu \left( C_V^{\text{мол}} T - \frac{a\nu}{V} \right) = \nu C_V^{\text{мол}} T - \frac{a\nu^2}{V}. \quad (2.8, \text{б})$$

Количество теплоты  $Q$ , необходимое для нагревания  $\nu = m/M$  молей вещества

$$Q = C\Delta T = \nu C^{\text{мол}} \Delta T = mc^{\text{уд}} \Delta T, \quad (2.9)$$

где  $C$  – теплоемкость газа;  $C^{\text{мол}}$  и  $c^{\text{уд}}$  – молярная и удельная теплоемкости газа соответственно.

5. Молярные теплоемкости идеального газа:

$$C_V^{\text{мол}} = iR/2 \text{ при } V = \text{const}, \quad C_p^{\text{мол}} = (i+2)R/2 \text{ при } p = \text{const}. \quad (2.10)$$

Уравнение связи между  $C_p^{\text{мол}}$  и  $C_V^{\text{мол}}$  для идеального газа

$$C_p^{\text{мол}} = C_V^{\text{мол}} + R - \text{уравнение Майера.} \quad (2.11)$$

Соотношения между удельными и молярными теплоемкостями:

$$c_V^{\text{уд}} = C_V^{\text{мол}}/M; \quad c_p^{\text{уд}} = C_p^{\text{мол}}/M. \quad (2.12)$$

6. Теплоемкость смеси массой  $m = \sum m_j$

$$C^{\text{смеси}} = \sum m_j c_j^{\text{уд}} = \sum \nu_j C_j^{\text{мол}}, \quad (2.13)$$

где  $j = 1, 2, \dots$  – номера компонентов смеси.

Удельная и молярная теплоемкости смеси:

$$c^{\text{уд}} = C^{\text{смеси}}/\sum m_j; \quad C^{\text{мол}} = C^{\text{смеси}}/\sum \nu_j. \quad (2.14)$$

Молярная масса смеси ( $m$  – масса смеси)

$$M_{\text{см}} = m / \sum v_j = \sum v_j M_j / \sum v_j, \quad (2.15)$$

где  $m_j$ ,  $v_j$ ,  $M_j$  – масса, число молей и молярная масса  $j$ -го компонента соответственно.

### **Тема 3. Равновесные термодинамические процессы**

7. Закон сохранения энергии для термодинамических процессов

$$\delta Q = dU + \delta A \Rightarrow Q = \Delta U + A - \text{первое начало термодинамики}, \quad (2.16)$$

где  $\delta Q$  и  $Q$  – подведенное (или отведенное) количество теплоты;  $dU$  и  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии;  $A$  и  $\delta A = p dV$  – работа газа, совершенная против внешних сил.

8. Уравнения *адиабатического процесса* для идеального газа

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{и} \quad Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}, \quad (2.17)$$

где  $\gamma = C_p / C_v$  – адиабатическая постоянная.

9. *Работа* идеального либо реального газа при изменении объема от  $V_1$  до  $V_2$

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV - \text{полная работа в любых процессах}. \quad (2.18)$$

Работа идеального газа при *изотермическом* изменении его объема

$$A_{12} = RT \frac{m}{M} \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad T = \text{const}. \quad (2.19)$$

Работа идеального газа при *адиабатическом* изменении его объема

$$A_{12} = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (2.20)$$

### **Тема 4. Статистические распределения частиц по скорости и координатам**

10. *Функция Максвелла* для распределения молекул газа по модулю скорости *теплового* (хаотического) движения

$$f(v, T) = \frac{dN}{N dv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \Rightarrow \frac{\Delta N}{N} \cong f(v, T) \Delta v, \quad (2.21)$$

где  $m_0$  – масса молекулы;  $dN/N$  (или  $\Delta N/N$ ) – доля молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$  (или в малом интервале  $\Delta v$ ).

*Наиболее вероятная скорость* молекул газа

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \quad (2.22)$$

*Средние арифметическая и квадратичная скорости* молекул газа:

$$\bar{v} = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}, \quad v_{кв} = \sqrt{3kT/m_0} = \sqrt{3RT/M}. \quad (2.23)$$

11. *Функция Больцмана* для распределения молекул по координатам в поле потенциальных (либо центробежных) сил

$$n = n_0 \exp[-W_{\pi}(x, y, z)/(kT)], \quad (2.24)$$

где  $n$  – концентрация молекул в точке с координатами  $x, y, z$ , а  $n_0$  – в точке отсчета потенциальной энергии, т. е. на нулевом уровне;  $W_{\pi}(x, y, z)$  – потенциальная энергия частицы.

В частном случае:

$$W_{\pi} = m_0 gh \text{ – в поле сил тяжести;}$$

$$W_{\pi} = -m_0 \omega^2 r^2 / 2 \text{ – в поле центробежных сил,}$$

где  $h$  – высота по отношению к нулевому уровню;  $\omega$  – угловая скорость вращения сосуда;  $r$  – расстояние до оси вращения.

В случае суспензий и эмульсий

$$W_{\pi} = (m_0 - m_{ж}) gh, \quad W_{\pi} = -(m_0 - m_{ж}) \omega^2 r^2 / 2,$$

где  $m_{ж}$  – масса жидкости, вытесненной частицей массой  $m_0$ .

*Барометрическая формула* и формула для плотности газа:

$$p = p_0 \exp\{-Mgh/(RT)\} \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\{-Mgh/(RT)\}, \quad (2.25)$$

где  $p_0$  и  $\rho_0$  – давление и плотность газа при  $h = 0$ .

12. *Средние длина  $\bar{\lambda}$  и время  $\tau$  свободного пробега* молекул газа:

$$\bar{\lambda} = \bar{v}/\bar{z} = 1/(\sqrt{2}\pi d^2 n), \quad \tau = 1/\bar{z}, \quad (2.26)$$

где  $\bar{z}$  – среднее число столкновений молекулы в единицу времени;  $d$  – эффективный диаметр молекулы;  $n$  – концентрация молекул.

## **Тема 5. Циклические процессы и изменение энтропии в равновесных процессах**

13. *Коэффициент полезного действия* тепловой машины, или *термический КПД*

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = A/Q_1, \quad (2.27)$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя;  $Q_2$  – количество теплоты, отданное холодильнику;  $A = Q_1 - Q_2$  – работа за цикл.

Коэффициент полезного действия *идеального цикла Карно*

$$\eta = (T_1 - T_2)/T_1, \quad (2.28)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – абсолютные температуры нагревателя и холодильника.

14. *Изменение энтропии  $S$  в произвольном равновесном процессе*

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \delta Q/T = \nu \int_1^2 C^{\text{мол}} dT/T. \quad (2.29)$$

Изменение энтропии *идеального газа* в произвольном процессе

$$\Delta S = \nu [C_V^{\text{мол}} \ln(T_2/T_1) + R \ln(V_2/V_1)]. \quad (2.30)$$

Изменение энтропии при *фазовом переходе первого рода* (плавление, кристаллизация, парообразование, конденсация)

$$\Delta S = m q / T^*, \quad (2.31)$$

где  $q$  и  $T^*$  – удельная теплота и температура фазового перехода.

## **Тема 6. Поверхностные и капиллярные явления**

15. *Коэффициент поверхностного натяжения  $\alpha$  жидкости* численно равен силе, приложенной к единице длины  $l$  контура, т. е. края поверхности жидкости (пленки)

$$\alpha = dF/dl \Rightarrow \alpha = F/l \Rightarrow F = \alpha l. \quad (2.32)$$

Работа, совершенная при изменении площади пленки на  $\Delta S$

$$A = \alpha \Delta S. \quad (2.33)$$

*Добавочное давление, связанное с кривизной поверхности жидкости*

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \text{формула Лапласа}, \quad (2.34)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости (для сферической поверхности  $R_1 = R_2 = R$ ).

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = 2\alpha \cos\theta / (\rho g r), \quad (2.35)$$

где  $\theta$  – краевой угол (при полном смачивании  $\theta = 0$ , при полном несмачивании  $\theta = \pi$ );  $\rho$  – плотность жидкости;  $r$  – радиус трубки.

## 2.4. Примеры решения задач

### Пример 1. Расчет энергии теплового движения молекул.

Чему равны средние кинетические энергии поступательного и вращательного движения всех молекул, содержащихся в  $m = 4$  кг кислорода при температуре  $T = 200$  К?

Дано:

$m = 4$  кг;

$T = 200$  К

Найти:  $E_{\text{пост}}$ ;  $E_{\text{вр}}$

Решение. Молекула кислорода – двухатомная, поэтому число степеней равно 5 (3 степени свободы поступательного и 2 степени свободы вращательного движений). Согласно формуле (2.6) на одну степень свободы приходится

энергия  $\epsilon_0 = kT/2$ , где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура.

Средние кинетические энергии поступательного и вращательного движений одной молекулы:

$$\epsilon_{\text{пост}} = 3\epsilon_0 = 3kT/2, \quad \epsilon_{\text{вр}} = 2\epsilon_0 = kT. \quad (1)$$

Число  $N$  молекул, содержащихся в газе массой  $m$

$$N = \nu N_A = (m/M)N_A,$$

где  $\nu$  – число молей;  $N_A$  – число Авогадро;  $M$  – молярная масса (для кислорода  $M = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).

Средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода

$$E_{\text{пост}} = N \epsilon_{\text{пост}} = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3 \cdot 4 \cdot 8,31 \cdot 200}{2 \cdot 32 \cdot 10^{-3}} = 3,12 \cdot 10^5 \text{ Дж}, \quad (2)$$

где  $R = kN_A$  – универсальная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул кислорода

$$E_{\text{вр}} = N \epsilon_{\text{вр}} = \frac{m}{M} RT = \frac{4 \cdot 8,31 \cdot 200}{32 \cdot 10^{-3}} = 2,08 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формул (2) и (3):

$$1 \text{ Дж} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{1 \text{ кг}/\text{моль}} = 1 \text{ Дж}.$$

**Пример 2. Расчет теплоемкости газовой смеси.** Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме  $c_V^{\text{уд}}$  для смеси, состоящей из  $\nu_1 = 2$  молей водорода и  $\nu_2 = 3$  молей гелия.

*Дано:*  
 $\nu_1 = 2$  моля;  
 $\nu_2 = 3$  моля

*Найти:*  $c_V^{\text{уд}}$

*Решение.* Количество теплоты, необходимое для нагрева смеси массой  $m$  до некоторой температуры, определяется по формуле (2.9):

$$Q = c_V^{\text{уд}} m \Delta T = c_V^{\text{уд}} (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) \Delta T, \quad (1)$$

где  $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль и  $M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярные массы водорода и гелия соответственно;  $\Delta T$  – приращение температуры.

С другой стороны, такое же количество теплоты можно с помощью формул (2.9) выразить через молярные теплоемкости водорода и гелия:

$$Q = \nu_1 C_{V_1}^{\text{мол}} \Delta T + \nu_2 C_{V_2}^{\text{мол}} \Delta T = (i_1 \nu_1 + i_2 \nu_2) R \Delta T / 2, \quad (2)$$

где  $i_1$  и  $i_2$  – числа степеней свободы молекул водорода и атомов гелия соответственно.

Молекула водорода – двухатомная, поэтому полное число ее степеней свободы  $i_1 = 3 + 2 = 5$  (3 поступательные и 2 вращательные). У атома гелия 3 поступательные степени свободы,  $i_2 = 3$ . Приравняв правые части выражений (1) и (2), получим

$$c_V^{\text{уд}} (\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2) = (i_1 \nu_1 + i_2 \nu_2) R / 2.$$

Отсюда удельная теплоемкость смеси

$$c_V^{\text{уд}} = \frac{(i_1 \nu_1 + i_2 \nu_2) R}{2(\nu_1 M_1 + \nu_2 M_2)} = \frac{(5 \cdot 2 + 3 \cdot 3) 8,31}{2(2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 4 \cdot 10^{-3})} \approx 4934 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

**Пример 3. Расчет степени диссоциации молекул.** При нагревании углекислого газа происходит диссоциация молекул  $\text{CO}_2$  на атомарный кислород  $\text{O}$  и окись углерода  $\text{CO}$ . Определить степень диссоциации  $\alpha$  молекул  $\text{CO}_2$ , если при нагревании  $\nu = 2,5 \cdot 10^{-3}$  молей этого газа в объеме  $V = 50 \text{ см}^3$  до температуры  $T = 2400 \text{ К}$  давление повысилось до  $p = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Степень диссоциации  $\alpha$  определяется как отношение числа распавшихся молекул газа ( $\Delta N$ ), к начальному числу  $N_0$  молекул ( $\alpha = \Delta N / N_0$ ).



Дано:

$$\nu = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ моля};$$

$$V = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$p = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$T = 2400 \text{ К}$$

Найти:  $\alpha$

*Решение.* Для решения используем закон Дальтона (2.4), согласно которому давление смеси равно сумме парциальных давлений молекул  $\text{CO}_2$ , CO и атомов кислорода, которые обозначим соответственно  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ :

$$p = p_1 + p_2 + p_3. \quad (1)$$

Согласно уравнению состояния идеального газа (2.1) давление  $p_1 = (1 - \alpha)\nu RT/V$ , где  $(1 - \alpha)$  – доля нераспавшихся молекул  $\text{CO}_2$ . При определении парциальных давлений  $p_2$  и  $p_3$  учтем, что общее число молей CO и кислорода равно  $2\alpha\nu$ , т. к. каждая распавшаяся молекула  $\text{CO}_2$  дает одну молекулу CO и один атом кислорода. Поэтому

$$p_2 + p_3 = 2\alpha\nu RT/V. \quad (2)$$

Подставим выражения для давления  $p_1$  и суммы давлений  $p_2$  и  $p_3$  в уравнение (1):

$$p = (1 - \alpha)(\nu RT/V) + 2\alpha\nu RT/V \Rightarrow pV = \nu RT + \alpha\nu RT.$$

Из полученного уравнения находим степень диссоциации:

$$\alpha = pV/(\nu RT) - 1 = [(1,1 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-5}) / (2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 2400)] - 1 \approx 0,103.$$

#### Пример 4. Статистические распределения частиц.

Представить функцию распределения Максвелла в виде распределения молекул массой  $m$  по кинетической энергии  $K = m\nu^2/2$ . Определить наиболее вероятное значение кинетической энергии  $K_v$ , а также долю молекул, обладающих энергией, отличающейся от  $K_v$  на  $\Delta K = 0,005 K_v$ .

Дано:

$f(\nu)$  – функция Максвелла;

$$\Delta K = 0,05 K_v$$

Найти:  $f(K)$ ,  $K_v$ ,  $\Delta N/N$

*Решение.* Функция Максвелла (2.21), определяющая распределение частиц системы по скоростям, позволяет получить функцию распределения этих частиц по их кинетической энергии  $K =$

$$m\nu^2/2:$$

$$\begin{aligned} dN/N = f(\nu)d\nu = f(K)dK &\Rightarrow f(K) = f(\nu) d\nu/dK = \\ &= 4\pi\nu^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\nu^2}{2kT}} d\nu/dK. \end{aligned} \quad (1)$$

Из выражения  $K = mv^2/2$  найдем скорость  $v$  и вычислим производную  $dv/dK$ :

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow \frac{dv}{dK} = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{2mK}}. \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1), а затем домножим и разделим полученное выражение на величину  $2m$ :

$$\begin{aligned} f(K) &= 4\pi \frac{2mv^2}{2m} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \frac{1}{\sqrt{2mK}} = \\ &= 4\pi \frac{2}{m} K \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{K}{kT}} \frac{1}{\sqrt{2mK}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{K} e^{-\frac{K}{kT}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы определить положение максимума функции  $f(K)$ , т. е. найти наиболее вероятное значение  $K$ , возьмем производную от функции (3) по  $K$  и, приравняв ее к нулю, получим

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2\sqrt{K}} e^{-\frac{K}{kT}} - \frac{\sqrt{K}}{kT} e^{-\frac{K}{kT}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{K}} - \frac{\sqrt{K}}{kT} = 0 \Rightarrow K_b = \frac{kT}{2}. \quad (4)$$

Значение  $K_b$  определяет положение максимума на графике функции распределения  $f(K)$ .

Чтобы определить долю частиц с энергией в диапазоне от  $K_b - \Delta K$  до  $K_b + \Delta K$ , проинтегрируем уравнение (1). Пользуясь известной формулой интегрального исчисления при  $\Delta K \ll K_b$ , получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{K_b - \Delta K}^{K_b + \Delta K} f(K) dK \approx 2f(K_b) \Delta K. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) значение  $K_b = kT/2$ , получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{kT}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 0,05 \frac{kT}{2} = \frac{0,1}{\sqrt{2\pi e}} = \frac{0,1}{\sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 2,718}} \approx 0,024.$$

**Пример 5. Определение термодинамических параметров идеального и реального газов.** До какого давления  $p$  следует сжать углекислый газ при температуре  $T = 300$  К, чтобы его плотность

оказалась равной  $\rho = 0,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ? Расчет провести для а) идеального и

б) реального газов. Для углекислого газа критическая температура  $T_{\text{кр}} = 304 \text{ К}$ , критическое давление  $p_{\text{кр}} = 7,39 \text{ МПа}$ .

*Дано:*

$$T = 300 \text{ К};$$

$$\rho = 0,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$M = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль};$$

$$T_{\text{кр}} = 304 \text{ К};$$

$$p_{\text{кр}} = 7,39 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

*Найти:*  $p_{\text{ид}}$ ;  $p_{\text{реал}}$ .

*Решение.* а) Для случая идеального газа используем уравнение Клапейрона – Менделеева (2.1):

$$p_{\text{ид}} = \nu RT / V = \rho RT / M = 0,5 \cdot 10^3 \cdot 8,31 \cdot 300 / 44 \cdot 10^{-3} = 2,83 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

б) Для случая реального газа используем уравнение Ван-дер-Ваальса (2.3,а):

$$(p + \nu^2 a / V^2)(V - \nu b) = \nu RT, \quad (1)$$

в которое подставим выражение для числа молей  $\nu = m / M = \rho V / M$ :

$$(p + \rho^2 a / M^2)(V - mb / M) = (m / M)RT.$$

Домножив это уравнение на  $M / V$ , выразим давление  $p$  реального газа через его плотность  $\rho$ :

$$p_{\text{реал}} = [\rho RT / (M - \rho b)] - a(\rho / M)^2. \quad (2)$$

Пользуясь соотношениями (2.3,б), значения постоянных  $a$  и  $b$  выразим через критические значения температуры и давления и по полученным формулам рассчитаем их:

$$T_{\text{кр}} / p_{\text{кр}} = 8b / R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = RT_{\text{кр}} / (8p_{\text{кр}}) = (8,31 \cdot 304) / (8 \cdot 7,39 \cdot 10^6) \approx 4,27 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль};$$

$$T_{\text{кр}} = 8a / (27bR) = 8a \cdot 8p_{\text{кр}} / (27R^2 T_{\text{кр}}) \Rightarrow$$

$$a = 27R^2 T_{\text{кр}}^2 / (64p_{\text{кр}}) = 27 \cdot 8,31^2 \cdot 304^2 / 64 \cdot 7,39 \cdot 10^6 \approx 0,364 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2.$$

Подставив значения  $a$  и  $b$  в расчетную формулу (2), получим

$$p_{\text{реал}} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 8,31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3} - 0,5 \cdot 10^3 \cdot 4,27 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,364 \cdot (0,5 \cdot 10^3)^2}{(44 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,81 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Из сравнения  $p_{\text{ид}}$  и  $p_{\text{реал}}$  видно, что давление реального газа оказывается меньше давления идеального газа. Это объясняется тем, что силы взаимного притяжения молекул сжимают газ, и давление на стенки уменьшается.

**Пример 6. Расчет циклических термодинамических процессов.** Тепловая машина, работающая по циклу Карно,

выполняет за один цикл работу  $A = 16$  кДж. При этом температура нагревателя в 1,8 раза больше температуры холодильника. Определить работу изотермического сжатия.

Дано:  
 $A = 16$  кДж;  
 $n = T_1/T_2 = 1,8$   
 Найти:  $A'$

Решение. Диаграмма цикла Карно показана на рис. 16. Работу газа при изотермическом расширении на участке 1–2 и изотермическом сжатии на участке 3–4 рассчитаем по формуле (2.19):

$$\begin{aligned} A_{12} &= \nu RT_1 \ln(V_2/V_1), \\ A' = A_{34} &= \nu RT_2 \ln(V_4/V_3), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nu$  – число молей газа;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_1$  и  $T_2$  – температуры нагревателя и холодильника;  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  и  $V_4$  – объемы газа в состояниях 1, 2, 3, 4.

Соотношения между объемами получим с помощью уравнений адиабат 2–3 и 4–1 в переменных  $T$ ,  $V$ , которые имеют следующий вид (см. формулы (2.17)):

$$\left. \begin{aligned} T_1 V_2^{\gamma-1} &= T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} &= T_2 V_4^{\gamma-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_2/V_1 = V_3/V_4, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

С учетом соотношения (2) из выражений (1) следует, что

$$\begin{aligned} A' &= -\nu RT_2 \ln(V_2/V_1) = \\ &= -A_{12} T_2/T_1 = -A_{12}/n. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью формулы (2.28) для КПД цикла Карно получим

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}. \quad (4)$$

С другой стороны, из определения (2.27) следует, что

$$\eta = A/Q_1, \quad (5)$$

где  $A = Q_1 - Q_2$  – работа за цикл;  $Q_1$  – теплота, полученная за цикл.

Из формулы (5) с учетом выражения (4) найдем, что

$$Q_1 = \frac{n}{n-1} A. \quad (6)$$

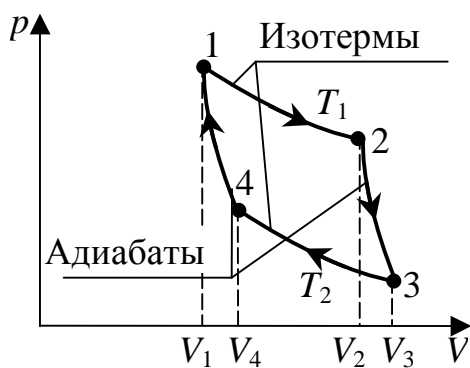


Рис. 16

Так как процесс 1–2 изотермический ( $\Delta U = 0$ ), то из первого начала термодинамики (2.16) следует, что работа  $A_{12}$  равна количеству теплоты  $Q_1$ . Поэтому, подставляя в формулу (3)  $A_{12} = Q_1$  и учитывая (6), найдем работу газа на участке 3–4:

$$A' = -Q_1/n = -A/(n-1) = -16/(1,8-1) = -20 \text{ кДж.}$$

Знак «минус» показывает, что над газом выполняют работу внешние силы.

**Пример 7. Тепловые процессы в реальных газах.** Один моль кислорода расширился от объема  $V_1 = 1$  л до  $V_2 = 3$  л при постоянной температуре  $T = 300$  К. Считая газ реальным, вычислить количество поглощенного газом тепла. Критические значения температуры и давления для кислорода:  $T_{\text{кр}} = 155$  К,  $p_{\text{кр}} = 5,08$  МПа.

*Дано:*

$$\nu = 1 \text{ моль;}$$

$$V_1 = 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$$

$$T = 300 \text{ К;}$$

$$T_{\text{кр}} = 155 \text{ К;}$$

$$p_{\text{кр}} = 5,08 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

*Найти:*  $Q$

*Решение.* Согласно первому началу термодинамики (2.16) количество теплоты

$$Q = \Delta U + A, \quad (1)$$

где  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии газа;  $A$  – работа, совершенная газом.

Согласно (2.8,б) внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu C_V^{\text{мол}} T - \frac{\nu^2 a}{V},$$

где  $C_V^{\text{мол}}$  – молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме;  $a$  – постоянная Ван-дер-Ваальса, учитывающая притяжение молекул.

Так как процесс изотермический ( $T_1 = T_2 = T$ ), то изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \nu C_V^{\text{мол}} (T_2 - T_1) - \nu^2 a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \nu^2 a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right). \quad (2)$$

Работу, совершаемую газом, рассчитаем по формуле (2.18):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (3)$$

Давление  $p$  выразим из уравнения Ван-дер-Ваальса (2.3,а):

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)(V - vb) = vRT \Rightarrow p = \frac{vRT}{V - vb} - \frac{v^2 a}{V^2}. \quad (4)$$

Выражение (4) для давления  $p$  подставим в формулу (3) и выполним интегрирование при условии  $T = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left( \frac{vRT}{V - vb} - \frac{v^2 a}{V^2} \right) dV = vRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - vb} - v^2 a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \\ &= vRT \ln \frac{V_2 - vb}{V_1 - vb} - v^2 a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения (2) и (5) в уравнение (1), получим, что

$$Q = vRT \ln \frac{V_2 - vb}{V_1 - vb}. \quad (6)$$

Найдем значение постоянной  $b$  Ван-дер-Ваальса, используя выражения (2.3,б) для критических значений давления и температуры:

$$p_{\text{кр}} = a/27b^2 \Rightarrow a = 27b^2 p_{\text{кр}}.$$

Подставим  $a$  в выражение для  $T_{\text{кр}}$ , получим

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb} = \frac{8bp_{\text{кр}}}{R} \Rightarrow b = \frac{RT_{\text{кр}}}{8p_{\text{кр}}} = \frac{8,31 \cdot 155}{8 \cdot 5,08 \cdot 10^6} \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

При проверке единиц измерения левой и правой частей формулы (6) учтем, что под знаком логарифма находится безразмерная комбинация величин. Поэтому

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ моль} \cdot 1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 1 \text{ К} = 1 \text{ Дж}.$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу (6), получим

$$Q = 8,31 \cdot 300 \cdot \ln \frac{3 \cdot 10^{-3} - 3,2 \cdot 10^{-5}}{10^{-3} - 3,2 \cdot 10^{-5}} \approx 2,7 \text{ кДж}.$$

### Пример 8. Расчет изменения энтропии идеального газа.

Кислород массой  $m = 16 \text{ г}$  адиабатически расширили в  $n = 2$  раза, а затем изобарически сжали до первоначального объема. Определить изменение энтропии газа в этом процессе.

Дано:  
 $m = 16 \cdot 10^{-3}$  кг;  
 $n = V_2/V_1 = 2$

Найти:  $\Delta S$

Решение. Диаграмма процесса представлена на рис. 17. Общее изменение энтропии складывается из изменения ее в отдельных процессах, т. е.

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}. \quad (1)$$

Так как процесс 1–2 адиабатический, то количество переданной теплоты  $\delta Q = 0$ . Поэтому с учетом формулы (2.29) получим

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \delta Q/T = 0. \quad (2)$$

Изменение энтропии на участке 2–3 рассчитаем по формуле (2.30):

$$\Delta S_{23} = \nu(c_V \ln(T_3/T_2) + R \ln(V_3/V_2)), \quad (3)$$

где  $\nu = m/M$  – число молей газа;  $M = 32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль – молярная масса кислорода;  $c_V = iR/2$  – молярная теплоемкость при постоянном  $V$ ;  $i = 5$  –

число степеней свободы двухатомной молекулы  $O_2$ ;  $T_3$ ,  $T_2$  и  $V_3$ ,  $V_2$  – температуры и объемы газа в состояниях 3 и 2.

Согласно условию  $V_3 = V_1$ , и, следовательно, отношение

$$V_3/V_2 = V_1/V_2 = 1/n. \quad (4)$$

Так как процесс 2–3 изобарический, то отношение  $T/V = \text{const}$ , поэтому

$$T_2/V_2 = T_3/V_3 \Rightarrow T_3/T_2 = V_3/V_2 = 1/n. \quad (5)$$

Подставим выражения (4) и (5) в формулу (3) и учтем, что  $\Delta S_{12} = 0$ . Тогда

$$\Delta S = \Delta S_{23} = \frac{m}{M} \left( \frac{i}{2} R \ln \frac{1}{n} + R \ln \frac{1}{n} \right) = -\frac{m}{M} R \frac{i+2}{2} \ln n. \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$1 \text{ Дж/К} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})}{1 \text{ кг/моль}} = 1 \text{ Дж/К}.$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу (4), получим

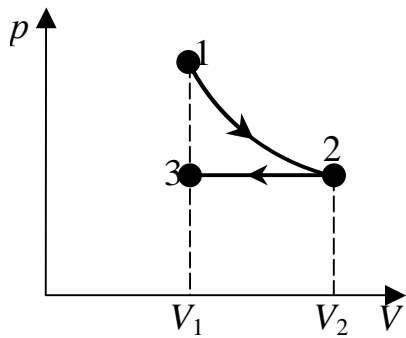


Рис. 17

$$\Delta S = -\frac{16 \cdot 10^{-3}(5+2)}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \cdot 8,31 \cdot \ln 2 \approx -10 \text{ Дж/К}.$$

**Пример 9. Расчет термодинамических процессов с учетом поверхностных явлений.** В начальном состоянии в сосуде с воздухом при нормальном атмосферном давлении находится мыльный пузырек диаметром  $d_0 = 1$  см. Во сколько раз надо изотермически уменьшить давление воздуха, чтобы диаметр пузырька увеличился в 1,5 раза? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\alpha = 40$  мН/м.

*Дано:*

$$p_{\text{атм}} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$d_0 = 0,01 \text{ м};$$

$$n = d/d_0 = 1,5;$$

$$\alpha = 0,04 \text{ Н/м}$$

$$\text{Найти: } k = p_{\text{атм}}/p$$

*Решение.* Давление внутри пузырька определяется давлением в сосуде и добавочным давлением, обусловленным кривизной поверхности пузырька. В начальном состоянии давление внутри пузырька

$$p_0 = p_{\text{атм}} + \Delta p_0. \quad (1)$$

Добавочное давление в пузырьке сферической формы, определяемой формулой Лапласа (2.34), рассчитаем при  $R_1 = R_2 = R_0$  ( $R_0 = d_0/2$ ):

$$\Delta p_0 = 2 \cdot 2\alpha / R_0 = 8\alpha / d_0. \quad (2)$$

Здесь учтено, что пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности (внешнюю и внутреннюю) почти одинакового радиуса  $R_0$ , поэтому добавочное давление Лапласа увеличилось в 2 раза.

После уменьшения давления воздуха в сосуде в  $k$  раз, давление внутри пузырька будет рассчитываться по формуле

$$p = \frac{p_{\text{атм}}}{k} + \frac{8\alpha}{d}. \quad (3)$$

Так как процесс уменьшения давления изотермический, то

$$p_0 V_0 = p V, \quad (4)$$

где  $V_0 = 4\pi R_0^3/3 = \pi d_0^3/6$  и  $V = \pi d^3/6$  – объемы пузырька до и после уменьшения давления воздуха в сосуде.

Подставляя в уравнение (4) выражения (1) и (3) с учетом формулы (2), получим следующее уравнение:

$$\left( p_{\text{атм}} + \frac{8\alpha}{d_0} \right) d_0^3 = \left( \frac{p_{\text{атм}}}{k} + \frac{8\alpha}{d} \right) d^3.$$

Отсюда найдем  $k$ , учитывая, что согласно условию  $d/d_0 = n$ :



$$p_{\text{атм}} + \frac{8\alpha}{d_0}(1 - n^2) = \frac{p_{\text{атм}}}{k} n^3 \Rightarrow k = \frac{p_{\text{атм}} n^3}{p_{\text{атм}} + \frac{8\alpha}{d_0}(1 - n^2)}. \quad (5)$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу (5), получим

$$k = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 1,5^3}{1,01 \cdot 10^5 + \frac{8 \cdot 0,04}{0,01}(1 - 1,5^2)} \approx 3,4 \text{ раза.}$$

## 2.5. Задачи к контрольной работе № 2

**Таблица вариантов заданий  
для студентов инженерно-технических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	31	51	71	81	91
2	2	12	22	33	53	72	82	92
3	3	13	23	35	55	73	83	93
4	4	14	24	37	57	74	84	94
5	5	15	25	39	59	75	85	95
6	6	16	26	41	61	76	86	96
7	7	17	27	43	63	77	87	97
8	8	18	28	45	65	78	88	98
9	9	19	29	47	67	79	89	99
0	10	20	30	49	69	80	90	100

**Таблица вариантов заданий  
для студентов химико-технологических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	32	52	71	81	91
2	2	12	22	34	54	72	82	92
3	3	13	23	36	56	73	83	93
4	4	14	24	38	58	74	84	94
5	5	15	25	40	60	75	85	95
6	6	16	26	42	62	76	86	96
7	7	17	27	44	64	77	87	97
8	8	18	28	46	66	78	88	98
9	9	19	29	48	68	79	89	99

0	10	20	30	50	70	80	90	100
---	----	----	----	----	----	----	----	-----

### **Тема 1. Расчет термодинамических параметров идеальных газов**

1. Определите массу газа в баллоне объемом  $V = 90$  л при температуре  $T = 285$  К и давлении  $p = 0,5$  МПа, если его плотность при нормальных условиях равна  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Определите количество вещества водорода, заполняющего сосуд объемом  $V = 3$  л, если концентрация молекул газа в сосуде  $n = 10^{18}$  м<sup>-3</sup>.

3. На сколько увеличится давление водорода в баллоне объемом  $V = 40$  л при температуре  $T = 290$  К, если в него дополнительно накачать  $m = 50$  г этого газа?

4. Определите молярную массу  $M$  газа, если при температуре  $T = 154$  К и давлении  $p = 2,8$  МПа он имеет плотность  $\rho = 6,1$  кг/м<sup>3</sup>.

5. Определите массу и количество молей азота, взятого из баллона объемом  $V = 20$  л при температуре  $T = 300$  К, если давление изменилось на  $\Delta p = 200$  кПа.

6. На сколько изменится давление кислорода в баллоне объемом  $V = 20$  л при температуре  $T = 300$  К, если из него выпустить  $m = 100$  г газа?

7. В баллоне вместимостью  $V = 3$  л содержится кислород массой  $m = 10$  г. Определите концентрацию  $n$  молекул газа.

8. В баллоне объемом  $V = 10$  л находится гелий под давлением  $p_1 = 1$  МПа и при температуре  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ . После того как из баллона было взято  $m = 10$  г гелия, температура в баллоне понизилась до  $t_2 = 17^\circ\text{C}$ . Определите давление гелия, оставшегося в баллоне.

9. Баллон емкостью  $V = 20$  л заполнен азотом при температуре  $T = 400$  К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на  $\Delta p = 200$  кПа. Определите массу израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

10. В баллоне емкостью  $V = 2$  дм<sup>3</sup> содержится газ под давлением  $p = 0,66 \cdot 10^6$  Па. Сколько молекул газа в баллоне, если его температура  $t = 17^\circ\text{C}$ ?

### **Тема 2. Равновесные свойства реальных газов**

11. Какой наибольший объем может занимать жидкая углекислота массой  $m = 1$  кг? Критические параметры для углекислого газа  $p_{\text{кр}} = 7,39$  МПа,  $T_{\text{кр}} = 304$  К.

12. Для некоторого газа поправка в уравнении Ван-дер-Ваальса

$a = 45,3 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{кмоль}^2$ , а критическая температура  $T_{\text{кр}} = 282,7 \text{ К}$ . Определите эффективный диаметр  $d$  молекулы газа.

13. При какой температуре 1 кмоль аргона будет занимать объем  $1 \text{ м}^3$ , если давление его равно  $p = 3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ? Критические параметры для аргона  $p_{\text{кр}} = 48,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T_{\text{кр}} = 150,8 \text{ К}$ . Для решения задачи воспользуйтесь приведенной формой уравнения Ван-дер-Ваальса.

14. Определите плотность воды в критическом состоянии по известной постоянной  $b = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$  в уравнении Ван-дер-Ваальса.

15. Определите плотность водорода в критическом состоянии. Для водорода критическая температура  $T_{\text{кр}} = 33,2 \text{ К}$ , критическое давление  $p_{\text{кр}} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

16. Определите критический объем одного моля кислорода. Для кислорода критическая температура  $T_{\text{кр}} = 155 \text{ К}$ , критическое давление  $p_{\text{кр}} = 5,08 \text{ МПа}$ .

17. В баллоне емкостью  $V = 20 \text{ л}$  находится  $\nu = 80$  молей некоторого газа. При  $t_1 = 14^\circ\text{С}$  давление газа равно  $p_1 = 9 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; при  $t_2 = 63^\circ\text{С}$  давление газа равно  $p_2 = 10,9 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Определите постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

18. В закрытом сосуде объемом  $V = 0,5 \text{ м}^3$  находится  $\nu = 0,6$  кмоль углекислого газа при давлении  $p = 3 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Пользуясь уравнением для реального газа, найдите, во сколько раз необходимо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое. Для углекислого газа критическая температура  $T_{\text{кр}} = 304 \text{ К}$ , критическое давление  $p_{\text{кр}} = 7,39 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

19. Во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин?

20. Определить массу кислорода в сосуде, объем которого  $V = 1 \text{ л}$ , если при его нагревании от температуры  $T_1 = 300 \text{ К}$  до  $T_2 = 600 \text{ К}$  давление повышается от  $p_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ Па}$  до  $p_2 = 11 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Результат получить, рассматривая газ как а) идеальный и б) как реальный.

### **Тема 3. Энергия и теплоемкость идеальных и реальных газов**

21. Вычислите удельные теплоемкости  $c_V$  и  $c_p$  смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода соответственно равны 80% и 20%. Газы считать идеальными.

22. Определите суммарную кинетическую энергию поступательного движения всех молекул идеального газа, находящегося в сосуде вместимостью  $V = 3$  л под давлением  $p = 540$  кПа.

23. Для одного моля ( $\nu = 1$  моль) некоторого двухатомного газа внутренняя энергия  $U = 6,02$  кДж/моль. Определите среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

24. Определите молярную массу  $M$  двухатомного идеального газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность удельных теплоемкостей этого газа равна  $c_p - c_v = 260$  Дж/(кг · К).

25. Определите показатель адиабаты идеального газа, который при температуре  $T = 350$  К и давлении  $p = 0,4$  МПа занимает объем  $V = 300$  л, а его теплоемкость  $C_V = 857$  Дж/К.

26. Определите молярные теплоемкости идеального газа, если его удельные теплоемкости  $c_v = 10,4$  кДж/(кг·К) и  $c_p = 14,6$  кДж/(кг · К).

27. Трехатомный идеальный газ под давлением  $p = 240$  кПа и температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  занимает объем  $V = 10$  л. Определите теплоемкость  $C_p$  этого газа при постоянном давлении.

28. Углекислый газ массой  $m = 88$  г занимает при температуре  $T = 290$  К объем  $V = 1000$  см<sup>3</sup>. Рассчитайте его внутреннюю энергию, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Для углекислого газа критическая температура  $T_{\text{кр}} = 304$  К, критическое давление  $p_{\text{кр}} = 7,39$  МПа.

29. Определите показатель адиабаты ( $C_p / C_V$ ) для смеси газов, содержащей гелий массой  $m_1 = 8$  г и водород массой  $m_2 = 2$  г. Газы считать идеальными.

30. Чему равна степень диссоциации молекул азота, если известно, что отношение  $C_p / C_V = 1,47$ ? Газ считать идеальным.

#### ***Тема 4. Молекулярные характеристики статистических распределений атомов и молекул***

31. Определите наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднюю квадратичную скорости молекул водорода при температуре  $t = 17^\circ\text{C}$ . Рассчитайте для этой температуры долю молекул от общего количества ( $\Delta N/N$ ), скорости которых находятся в малом интервале  $\Delta v = 10$  м/с вблизи наиболее вероятной скорости.

32. Какова средняя арифметическая скорость молекул кислорода при нормальном давлении, если длина свободного пробега молекул кислорода при этих условиях равна  $\bar{\lambda} = 100$  нм? Эффективный диаметр молекулы кислорода  $d = 2,7 \cdot 10^{-10}$  м.

33. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на  $\Delta v = 100$  м/с?

34. Используя закон распределения молекул газа по скоростям, получите формулу для наиболее вероятной скорости  $v_v$ .

35. На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна  $t = 10^\circ\text{C}$ .

36. Определите отношение давления воздуха на высоте  $h_1 = 1$  км к давлению на дне скважины глубиной  $h_2 = 1$  км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

37. На какой высоте плотность воздуха в  $e$  раз ( $e$  – основание натурального логарифма) меньше по сравнению с его плотностью при нормальных условиях на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считайте не зависящими от высоты.

38. Определите высоту полета самолета, если давление снаружи самолета в 2,5 раза меньше, чем на уровне моря. Температуру считать не зависящей от высоты и равной  $t = 0^\circ\text{C}$ .

39. Определите массу пылинок, если их концентрация вблизи потолка в 5 раз меньше, чем у пола. Высота комнаты  $h = 3$  м, температура воздуха равна  $t = 20^\circ\text{C}$ .

40. На уровне моря в воздухе концентрация молекул кислорода в  $6,7 \cdot 10^6$  раз больше концентрации молекул водорода. На какой высоте над уровнем моря концентрации этих газов одинаковы? Температуру воздуха принять не зависящей от высоты и равной  $t = 0^\circ\text{C}$ .

41. Определите плотность воздуха на поверхности Земли и на высоте  $h = 4$  км. Температура воздуха равна  $T = 273$  К, давление на поверхности Земли нормальное.

42. С какой частотой должен вращаться барабан центрифуги диаметром  $d = 20$  см, чтобы концентрация пылинок массой  $m_0 =$

$= 10^{-22}$  кг на оси барабана была в 10 раз меньше, чем у стенок. Температура равна  $t = 20^\circ\text{C}$ .

43. Барабан центрифуги диаметром  $D = 20$  см, вращающийся с частотой  $n = 10\,000$  об/мин, заполнен суспензией, твердые частицы которой имеют массу  $m_0 = 10^{-23}$  кг. Температура суспензии  $t = 23^\circ\text{C}$ . Определите отношение концентрации частичек у стенок барабана и на его оси.

44. При каком давлении  $p$  средняя длина свободного пробега молекул азота равна  $\bar{\lambda} = 1$  м, если температура газа  $t = 10^\circ\text{C}$ ? Эффективный диаметр молекулы азота  $d = 3 \cdot 10^{-10}$  м.

45. В сосуде вместимостью  $V = 5$  л находится водород массой  $m = 0,5$  г. Определите среднюю длину свободного пробега молекулы водорода в этом сосуде. Эффективный диаметр молекулы водорода  $d = 2,3 \cdot 10^{-10}$  м.

46. Средняя длина свободного пробега молекулы водорода при некоторых условиях равна  $\bar{\lambda} = 2$  мм. Найдите плотность водорода при этих условиях. Эффективный диаметр молекулы водорода  $d = 2,3 \cdot 10^{-10}$  м.

47. Определите среднюю продолжительность  $\bar{\tau}$  свободного пробега молекул водорода при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$  и давлении  $p = 0,5$  кПа. Эффективный диаметр молекулы водорода  $d = 2,3 \cdot 10^{-10}$  м.

48. При температуре  $T = 300$  К и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна  $\lambda = 0,1$  мкм. Чему станет равно среднее число столкновений  $\bar{z}$ , испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считайте постоянной.

49. В сферической колбе объемом  $V = 1$  л находится азот. При какой плотности газа средняя длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда? Эффективный диаметр молекулы азота  $d = 3 \cdot 10^{-10}$  м.

50. Какая часть молекул кислорода при  $t = 0^\circ\text{C}$  обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с?

### ***Тема 5. Расчет характеристик равновесных термодинамических процессов***

51. Определите количество теплоты  $Q$ , которое надо сообщить кислороду объемом  $V = 50$  л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на  $\Delta p = 0,5$  МПа. Газ считать идеальным.

52. Азот в количестве  $\nu = 3$  моля расширяется адиабатно в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от  $V_1 = 1$  л до  $V_2 = 5$  л. Найдите изменение температуры при этом расширении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной? Для азота критическая температура  $T_{кр} = 126$  К, критическое давление  $p_{кр} = 3,49$  МПа.

53. При изотермическом расширении азота при температуре  $T = 280$  К его объем увеличился в 2 раза. Масса азота  $m = 0,2$  кг. Определите: 1) совершенную при расширении работу  $A$ ; 2) изменение  $\Delta U$  внутренней энергии; 3) количество теплоты  $Q$ , полученное газом. Газ считать идеальным.

54. Кислород массой  $m = 200$  г занимает объем  $V_1 = 100$  л и находится под давлением  $p_1 = 200$  кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема  $V_2 = 300$  л, а затем его давление возросло до  $p_3 = 500$  кПа при неизменном объеме. Найдите изменение внутренней энергии  $\Delta U$  газа, совершенную газом работу  $A$  и теплоту  $Q$ , переданную газу. Постройте график процесса. Газ считать идеальным.

55. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ( $\nu = 2$  моль) на  $\Delta T = 90$  К ему было сообщено количество теплоты  $Q = 5,25$  кДж. Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии; 3) величину  $\gamma = C_p/C_v$ .

56. Азот массой  $m = 280$  г расширяется в результате изобарного процесса при давлении  $p = 1$  МПа. Определите: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота  $Q = 5$  кДж, а начальная температура азота  $T_1 = 290$  К. Газ считать идеальным.

57. Кислород в количестве  $\nu = 2$  моля занимает объем  $V_1 = 1$  л. Считая газ реальным, определите изменение температуры кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема  $V_2 = 10$  л. Для кислорода критическая температура  $T_{кр} = 155$  К, критическое давление  $p_{кр} = 5,08$  МПа.

58. Азот массой  $m = 0,1$  кг был изобарно нагрет от температуры  $T_1 = 200$  К до температуры  $T_2 = 400$  К. Определите работу  $A$ ,

совершенную газом, полученную им теплоту  $Q$  и изменение  $\Delta U$  внутренней энергии азота. Газ считать идеальным.

59. Азот в количестве  $\nu = 2$  моля адиабатно расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1 К. Определите работу, совершаемую реальным газом против межмолекулярных сил притяжения.

60. Кислород объемом  $V = 1$  л находится под давлением  $p = 1$  МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса. Газ считать идеальным.

61. Некоторый газ массой  $m = 5$  г расширяется изотермически от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 2V_1$ . Работа расширения  $A = 1$  кДж. Считая газ идеальным, определите среднюю квадратичную скорость молекул газа.

62. Кислород в количестве  $\nu = 1$  моля (реальный газ), занимавший при  $T_1 = 400$  К объем  $V_1 = 1$  л, расширяется изотермически до  $V_2 = 2V_1$ . Определите работу при расширении и изменение внутренней энергии. Постоянные  $a$  и  $b$  соответственно равны  $0,136 \text{ Н}\cdot\text{м}^4/\text{моль}^2$  и  $3,17\cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

63. Азот массой  $m = 14$  г сжимают изотермически при температуре  $T = 300$  К от давления  $p_1 = 100$  кПа до давления  $p_2 = 500$  кПа. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты. Газ считать идеальным.

64. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества  $\nu = 0,4$  моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты  $Q = 800$  Дж? Температура водорода  $T = 300$  К. Газ считать идеальным.

65. Определите работу  $A$ , которую совершит трех атомный идеальный газ, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты  $Q = 21$  кДж. Найдите также изменение  $\Delta U$  внутренней энергии этого газа.

66. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа  $A = 2$  кДж. Определите количество подводимой теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

67. При адиабатном расширении кислорода ( $\nu = 2$  моля), находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в 3 раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа. Газ считать идеальным.



68. Азот массой  $m = 1$  кг занимает при температуре  $T_1 = 300$  К объем  $V_1 = 0,5$  м<sup>3</sup>. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите: 1) конечный объем газа; 2) конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа. Газ считать идеальным.

69. Кислород, занимающий при давлении  $p_1 = 0,5$  МПа объем  $V_1 = 5$  л расширяется так, что объем увеличивается в 3 раза. Определите конечное значение давления и работу, совершенную газом, если процесс протекал адиабатически. Газ считать идеальным.

70. Азот, находившийся при температуре  $T_1 = 400$  К, подвергли адиабатному расширению. В результате расширения объем увеличился в 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определите массу азота. Газ считать идеальным.

### **Тема 6. Расчет характеристик циклических процессов**

71. Идеальный двухатомный газ ( $\nu = 3$  моля), занимающий объем  $V_1 = 5$  л и находящийся под давлением  $p_1 = 1$  МПа, подвергли изохорному нагреванию до  $T_2 = 500$  К. После этого газ изотермически расширяется до начального давления, а затем в результате изобарного сжатия он возвращен в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла.

72. Идеальный газ, который совершает цикл Карно с КПД  $\eta = 25\%$ , при изотермическом расширении совершает работу  $A = 240$  Дж. Какая работа совершается газом при изотермическом сжатии?

73. Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = 5,5$  кДж и совершил работу  $A = 1,1$  кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.

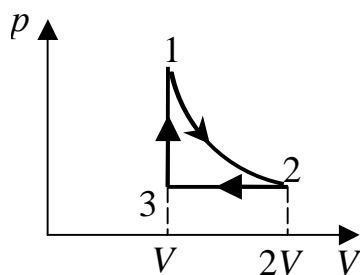


Рис. 18

74. На рис. 18 представлен замкнутый цикл, состоящий из изотермы расширения 1–2, изобары сжатия 2–3 и изохоры 3–1. Определите КПД цикла, если рабочим веществом является идеальный двухатомный газ.

75. Идеальный двухатомный газ совершает замкнутый цикл, состоящих из двух изохор и двух изобар. При этом

наибольшее давление в 3 раза больше наименьшего, а наибольший объем в 5 раз больше наименьшего. Определите КПД этого цикла.

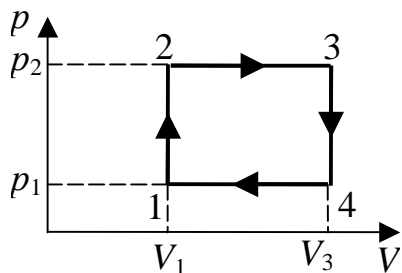


Рис. 19

76. Воздух массой  $m = 1$  кг совершает цикл, который состоит из двух изохор (1–2, 3–4) и двух изобар (2–3, 4–1) (рис. 19). Начальный объем газа  $V_1 = 80$  дм<sup>3</sup>, давление изменяется от  $p_1 = 1,2$  МПа до  $p_2 = 1,4$  МПа, температура  $t_3 = 150^\circ\text{C}$ . Определите КПД цикла. Газ считать идеальным.

77. Идеальный трехатомный газ нагревается при постоянном объеме так, что его давление возрастает в два раза. После этого газ изотермически расширяется до первоначального давления и затем изобарно сжимается до начального объема. Представьте диаграмму цикла и определите его КПД.

78. Идеальный трехатомный газ нагревается при постоянном объеме так, что его давление возрастает в 2 раза. После этого газ адиабатически расширяется до первоначального давления и затем изобарно сжимается до начального объема. Представьте диаграмму цикла и определите его КПД.

79. Газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту  $Q_1 = 84$  кДж. Определите работу  $A$  газа, если температура  $T_1$  теплоотдатчика в три раза выше температуры  $T_2$  теплоприемника.

80. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприемнику теплоту  $Q_2 = 14$  кДж. Определите температуру  $T_1$  теплоотдатчика, если при температуре теплоприемника  $T_2 = 280$  К работа цикла  $A = 6$  кДж.

### Тема 7. Изменение энтропии в идеальных и реальных системах

81. При нагревании аргона массой  $m = 8$  г его абсолютная температура увеличилась в 2 раза. Определите изменения энтропии при изохорном и изобарном нагревании. Газ считать идеальным.

82. К воде массой  $m_1 = 50$  г при температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  добавили  $m_2 = 100$  г льда при температуре  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ . Определите изменение энтропии системы, когда она придет в равновесное состояние.

83. Два моля азота ( $\nu = 2$  моль) вначале изотермически расширяют от объема  $V_1$  до  $V_2 = 2V_1$ , после чего изобарно сжимают до первоначального объема. Определите изменение энтропии азота в

этом процессе. Газ считать идеальным.

84. Лед массой  $m = 150$  г с начальной температурой  $t_1 = -20^\circ\text{C}$  превратили в пар с температурой  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ . Определите изменение энтропии в этом случае.

85. Воздух массой  $m = 1$  кг сжали адиабатически так, что его объем уменьшается в 6 раз, а затем при постоянном объеме давление возросло в 1,5 раза. Определите изменение энтропии воздуха в этом процессе. Газ считать идеальным.

86. Определите изменение энтропии при адиабатическом объединении объемов азота массой  $m_1 = 3$  кг и углекислого газа массой  $m_2 = 2$  кг. Температура и давление газов до смешивания одинаковы. Газы считать идеальными.

87. Воду массой  $m_1 = 200$  г при температуре  $t_1 = 60^\circ\text{C}$  смешали с водой массой  $m_2 = 200$  г при температуре  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Определите изменение энтропии системы в этом случае.

88. Определите изменения энтропии при изохорном и изобарном охлаждении  $m = 2$  г воздуха от  $40^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$ . Газ считать идеальным.

89. Адиабатически смешиваются объемы  $V_1 = 5$  л и  $V_2 = 3$  л двух разнородных химически не реагирующих идеальных газов, имеющих одинаковую температуру  $T = 300$  К и давление  $p = 10^5$  Па. Определите изменение энтропии в этом случае.

90. Кислород массой  $m = 10$  г нагревают от  $50^\circ\text{C}$  до  $150^\circ\text{C}$ . Найдите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно. Газ считать идеальным.

### **Тема 8. Поверхностные и капиллярные явления**

91. Широкое колено  $U$ -образного манометра имеет диаметр  $d_1 = 2$  мм, узкое –  $d_2 = 1$  мм. Определите разность  $\Delta h$  уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути  $\alpha = 0,5$  Н/м, плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, а краевой угол  $\theta = 138^\circ$ .

92. Определите радиус  $R$  капли спирта, вытекающего из тонкой трубки радиусом  $r = 1$  мм. Считайте, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта  $\alpha = 22$  мН/м, а его плотность  $\rho = 0,79$  г/см<sup>3</sup>.

93. Считая процесс увеличения размера мыльного пузыря изотермическим, определите работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы увеличить его размер с  $d_1 = 6$  мм до  $d_2 = 60$  мм. Поверхностное

натяжение мыльного раствора равно  $\alpha = 40$  мН/м.

94. Две капли воды радиусом  $r = 1$  мм каждая слились в одну. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение свободной энергии поверхностного слоя жидкости при слиянии, если поверхностное натяжение воды  $\alpha = 73$  мН/м.

95. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на  $\Delta p = 200$  Па больше атмосферного. Определите диаметр  $d$  пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\alpha = 40$  мН/м.

96. Воздушный пузырек диаметром  $d = 0,02$  мм находится на глубине  $h = 25$  см под поверхностью воды. Определите давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды  $\alpha = 73$  мН/м, а плотность  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

97. Капилляр, внутренний радиус которого  $r = 0,5$  мм, опущен в жидкость. Определите массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно  $\alpha = 60$  мН/м. Смачивание считать полным.

98. В стеклянном капилляре диаметром  $d = 100$  мкм вода поднимается на высоту  $h = 30$  см. Определите поверхностное натяжение  $\alpha$  воды, если ее плотность  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

99. Мыльный пузырь сферической формы выдувается так, что его радиус каждую секунду увеличивается на 1 см. Определите мощность необходимую для выдувания пузыря радиусом  $R = 5$  см. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $\alpha = 40$  мН/м.

100. Какую работу против сил поверхностного натяжения необходимо совершить, чтобы увеличить диаметр мыльного пузыря от 1 см до 9 см. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды равен  $\alpha = 40$  мН/м.



# ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3\*

### 3.1. Содержание учебной программы по разделу «Стационарное электрическое поле» (для инженерно-технических специальностей)

**1. Электростатическое поле в вакууме.** Электрический заряд. Дискретность заряда. Закон сохранения заряда. Закон Кулона. Электрическое поле, напряженность поля. Принцип суперпозиции. Поле электрического диполя. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Гаусса к расчету полей. Работа сил электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал. Связь напряженности электростатического поля с потенциалом. Эквипотенциальные поверхности.

**2. Электрическое поле в веществе.** Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Типы диэлектриков. Диполь в однородном и неоднородном электрическом полях. Поляризация диэлектриков. Виды поляризации. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость и ее зависимость от температуры. Поляризационные заряды на поверхности и внутри диэлектрика. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость среды. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред. Сегнетоэлектрики. Электреты. Поле внутри проводника и вблизи его поверхности. Распределение зарядов в проводнике. Электростатическая защита. Генератор Ван-дер-Граафа.

**3. Энергия электрического поля. Электрическая емкость проводников и конденсаторов.** Емкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы и их соединение. Энергия системы зарядов. Энергия заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Плотность энергии электростатического поля. Работа и энергия поляризации.

**4. Постоянный электрический ток.** Характеристики и условия существования постоянного электрического тока. Закон Ома в локальной и интегральной формах. Сторонние силы. Закон Ома для

---

\* Материал этой работы подготовлен Тульевым В. В.

неоднородного участка цепи. Правила Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и локальной формах. Классическая теория электропроводности металлов и ее опытное обоснование. Вывод законов Ома, Джоуля – Ленца, Видемана – Франца на основе классических представлений. Затруднения классической электронной теории электропроводности металлов. Границы применимости закона Ома. Ток в газах и электролитах. Плазма. Дебаевский радиус экранирования.

### **3.2. Содержание учебной программы по разделу «Электричество» (для химико-технологических специальностей)**

**1. Электростатика. Электростатическое поле в вакууме.** Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда. Дискретность и инвариантность электрического заряда. Закон Кулона. Проблема далеко- и близкодействия. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциальность электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Потенциал. Разность потенциалов. Эквипотенциальные поверхности. Связь между напряженностью и потенциалом. Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле электрического диполя. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме. Движение заряженных частиц в электростатических полях. Диполь во внешних однородном и неоднородном электростатических полях. Дифференциальная форма уравнений электростатического поля.

**2. Электростатическое поле в веществе.** Дипольные моменты молекул. Явление поляризации диэлектриков во внешнем электростатическом поле. Поляризационные связанные заряды. Напряженность электрического поля внутри поляризованного диэлектрика. Вектор поляризации. Диэлектрическая восприимчивость. Связь между вектором поляризации и плотностью поляризационных зарядов. Типы диэлектриков. Механизмы поляризации полярных и неполярных диэлектриков. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая проницаемость среды. Теорема Гаусса для электростатического поля в веществе. Условия для характеристик поля на границе двух однородных диэлектриков. Сегнетоэлектрики. Поляризация сегнетоэлектриков. Диэлектрический

гистерезис. Температура Кюри. Пьезоэлектрический и стрикционный эффекты. Проводники во внешнем электрическом поле. Явление электростатической индукции. Распределение заряда в заряженном проводнике. Напряженность и потенциал электростатического поля внутри и вблизи поверхности заряженного проводника. Электростатическая защита.

**3. Электрическая емкость проводников и конденсаторов.** Энергия электрического поля. Электрическая емкость проводников и конденсаторов. Виды соединений конденсаторов. Теорема Ирншоу. Энергия системы точечных зарядов. Энергия заряженных проводника и конденсатора. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии.

**4. Постоянный электрический ток.** Электрический ток, его характеристики и условия существования. Ток проводимости и конвекционный ток. Сила тока. Источники тока. Электродвижущая сила. Разность потенциалов и напряжение. Сопротивление проводников. Закон Ома для однородного и неоднородного участков электрической цепи. Закон Ома для полной цепи. Закон Джоуля – Ленца. Расчет разветвленных электрических цепей. Правила Кирхгофа. Плотность тока. Подвижность носителей заряда. Ток проводимости в металлах. Основы классической электронной теории электропроводности металлов. Закон Ома в дифференциальной форме. Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов. Закон Видемана – Франца. Недостатки классической теории электропроводности и теплопроводности металлов.

Электрический ток в электролитах. Электропроводность электролитов. Электролитическая диссоциация. Электролиз. Законы Фарадея для электролиза. Модель Дебая и Хюккеля. Электрический ток в газах. Электропроводность газов. Ионизация молекул газов. Несамостоятельный газовый разряд. Ударная ионизация газов. Самостоятельный газовый разряд и его типы. Газоразрядная плазма. Электронная эмиссия. Работа выхода электрона из металла. Электрический ток в вакууме. Вольтамперная характеристика вакуумного диода. Формула Богуславского – Ленгмюра и Ричардсона – Дешмена.

### **3.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения**

#### ***Тема 1. Электрическое поле***



1. Сила взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \text{закон Кулона}, \quad (3.1)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость изотропной среды;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий заряды  $q_1$  и  $q_2$ ;  $r$  – расстояние между зарядами ( $r = |\vec{r}|$ ).

Модуль вектора кулоновской силы  $F$

$$F = \frac{|q_1| |q_2|}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (3.2)$$

2. Напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  электрического поля

$$\vec{E} = \vec{F}/q \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}, \quad \phi = \Pi/q \Rightarrow \Pi = q\phi, \quad (3.3)$$

где  $\vec{F}$  – сила, действующая на точечный заряд  $q$ , помещенный в некоторую точку электрического поля с напряженностью  $\vec{E}$ ;  $\Pi$  – потенциальная энергия заряда  $q$  в точке поля с потенциалом  $\phi$ .

3. Напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  поля точечного заряда  $q$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}, \quad (3.4)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $q$  с точкой поля, в которой определяются напряженность и потенциал;  $r$  – расстояние от заряда  $q$  до этой точки ( $r = |\vec{r}|$ ).

Модуль вектора напряженности  $E$  точечного заряда

$$E = |q| / (4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2). \quad (3.5)$$

4. Напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  поля системы  $N$  точечных зарядов

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad \phi = \sum_{i=1}^N \phi_i - \text{принцип суперпозиции для } \vec{E} \text{ и } \phi, \quad (3.6)$$

где  $\vec{E}_i$ ,  $\phi_i$  – напряженность и потенциал поля  $i$ -го заряда.

Напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  поля распределенного заряда

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad \phi = \int d\phi, \quad (3.7)$$

где  $d\vec{E}$ ,  $d\varphi$  – напряженность и потенциал поля элементарного заряда  $dq$ .

5. *Линейная плотность заряда*, распределенного по тонкому стержню или нити ( $dq$  – элементарный заряд участка длиной  $dl$ )

$$\tau = dq/dl. \quad (3.8)$$

*Поверхностная плотность заряда*, распределенного по поверхности тела ( $dq$  – элементарный заряд участка поверхности площадью  $dS$ )

$$\sigma = dq/dS. \quad (3.9)$$

*Объемная плотность заряда*, распределенного по объему тела

$$\rho = dq/dV \quad (dq \text{ – элементарный заряд объема } dV). \quad (3.10)$$

6. *Электрический момент* диполя, или *дипольный момент*

$$\vec{p} = ql, \quad (3.11)$$

где  $\vec{l}$  – вектор, проведенный от отрицательного заряда диполя к положительному (плечо диполя).

7. *Поток*  $\Phi_D$  вектора электрического смещения  $\vec{D}$  электростатического поля через любую замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов  $q_i$ , находящихся внутри поверхности  $S$  ( $\oint_S D_n dS = \Phi_D$  – поток вектора  $\vec{D}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$ ):

$$\oint_S D_n dS = \sum_i q_i \Rightarrow \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_i q_i \text{ – теоремы Гаусса для } \vec{D} \text{ и } \vec{E}, \quad (3.12)$$

где  $D_n$  и  $E_n$  – проекции векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на направление нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$  в каждой ее точке соответственно.

8. Уравнение связи между потенциалом  $\varphi$  и напряженностью  $\vec{E}$  неоднородного электростатического поля

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (3.13)$$

Для однородного электростатического поля модуль вектора  $\vec{E}$

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d, \quad \varphi_1 > \varphi_2, \quad (3.14)$$

где  $d$  – расстояние вдоль линий напряженности между точками поля с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Для поля с центром или осью симметрии

$$E_r = -(d\varphi/dr) - \text{проекция вектора } \vec{E} \text{ на радиальное направление.} \quad (3.15)$$

9. Напряженности полей, создаваемых бесконечными равномерно заряженными нитью и плоскостью соответственно

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0\epsilon r), \quad E = \sigma / (2\epsilon_0\epsilon), \quad (3.16).$$

где  $\tau$  и  $\sigma$  – линейная и поверхностная плотности распределенных зарядов.

10. Работа  $A$  сил электростатического поля по перемещению заряда  $q$  из точки поля с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi. \quad (3.17)$$

11. Определения *электроемкости* уединенного проводника ( $q$ ,  $\varphi$  – его заряд и потенциал) и конденсатора ( $q$ ,  $U$  – заряд на одной из обкладок конденсатора и напряжение между ними) соответственно

$$C = q / \varphi, \quad C = q / U. \quad (3.18)$$

12. Электроемкость уединенной проводящей сферы радиусом  $R$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (3.19)$$

13. Электроемкость плоского конденсатора ( $S$  – площадь одной пластины (обкладки) конденсатора;  $d$  – расстояние между пластинами)

$$C = \epsilon_0\epsilon S / d. \quad (3.20)$$

14. Электроемкость батареи из  $N$  конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} - \text{при последовательном соединении;} \quad (3.21)$$

$$C = \sum_{i=1}^N C_i - \text{при параллельном соединении.} \quad (3.22)$$

15. Энергия  $W$  заряженного уединенного проводника

$$W = q\varphi / 2 = C\varphi^2 / 2 = q^2 / (2C). \quad (3.23)$$

16. Энергия  $W$  заряженного конденсатора

$$W = qU / 2 = CU^2 / 2 = q^2 / (2C). \quad (3.24)$$

17. Энергия  $W_e$  и объемная плотность  $w_e$  энергии электрического поля

$$W_e = ED V / 2 = \epsilon_0 \epsilon E^2 V / 2 = D^2 V / (2\epsilon_0 \epsilon), \quad (3.25, a)$$

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} E D = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon} D^2. \quad (3.25, б)$$

## **Тема 2. Электрический ток**

18. Сила тока  $I$  равна количеству заряда, который проходит в проводнике через его поперечное сечение в единицу времени:

$$I = dq / dt, \text{ или } I = q / t \text{ (при } I = \text{const}). \quad (3.26)$$

19. Сила тока, отнесенная к единице площади поперечного сечения проводника, называется *плотностью тока*, т. е.

$$j = dI / dS, \text{ или } j = I / S \text{ (при } j = \text{const}). \quad (3.27)$$

20. Законы Ома для неоднородного и однородного участков цепи:

$$I = U / (R + r), \quad U = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E} - \text{ для неоднородного участка; } \quad (3.28)$$

$$I = U / R, \quad U = \varphi_1 - \varphi_2 - \text{ для однородного участка, } \quad (3.29)$$

где  $\mathcal{E}$  – электродвижущая сила (ЭДС) источника тока с внутренним сопротивлением  $r$ .

21. Закон Ома для замкнутой электрической цепи, содержащей источник электродвижущей силы  $\mathcal{E}$  с внутренним сопротивлением  $r$

$$I = \mathcal{E} / (R + r). \quad (3.30)$$

22. Сопротивление  $R$  однородного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  определяется по формуле

$$R = \rho(l / S), \quad \rho - \text{ удельное сопротивление проводника. } \quad (3.31)$$

23. Зависимость удельного сопротивления  $\rho$  от температуры  $t$

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad \alpha - \text{ температурный коэффициент сопротивления; } \quad (3.32)$$

$\rho_0$  – удельное сопротивление материала при  $t = 0^\circ\text{C}$ .

24. Последовательное и параллельное соединения проводников:  
при последовательном соединении

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n, \quad U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad R = \sum_{i=1}^n R_i; \quad (3.33)$$

при параллельном соединении

$$I = \sum_{i=1}^n I_i, \quad U = U_1 = U_2 = \dots = U_n, \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \quad (3.34)$$

где  $I_i$ ,  $U_i$  и  $R_i$  – соответственно сила тока, напряжение и сопротивление  $i$ -го участка цепи.

25. Работа  $A$  и мощность  $P$  электрического тока на однородном участке цепи сопротивлением  $R$ , к концам которого приложено напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , определяются по следующим формулам:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)t = IUt = I^2 R t = (U^2 / R)t, \quad (3.35, \text{ а})$$

$$P = A / t = IU = I^2 R = U^2 / R. \quad (3.35, \text{ б})$$

26. Теплота  $Q$ , которая выделяется при прохождении тока силой  $I$  на однородном участке цепи сопротивлением  $R$  за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt, \text{ или } Q = I^2 R \Delta t \text{ (при } I = \text{const}) - \text{закон Джоуля – Ленца.} \quad (3.36)$$

27. Работа  $A$ , которая выполняется источником тока за время  $t$

$$A = \mathcal{E} I t = I^2 (R + r) t = (\mathcal{E}^2 / (R + r)) t, \quad (3.37)$$

где  $\mathcal{E}$  – электродвижущая сила;  $R$  – сопротивление внешней цепи.

28. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле разветвленной цепи равна нулю (следствие закона сохранения заряда) т. е.

$$\sum_{i=1}^N \hat{I}_i = 0 - \text{первое правило Кирхгофа.} \quad (3.38)$$

В любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^M (\pm I_k R_k) = \sum_{k=1}^L \hat{\mathcal{E}}_k - \text{второе правило Кирхгофа.} \quad (3.39)$$

### 3.4. Примеры решения задач

**Пример 1. Определение равнодействующей электрических сил.** Два положительных заряда  $q_1 = 5$  нКл и  $q_2 = 3$  нКл находятся на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга в вакууме. Определить силу  $\vec{F}$ , действующую на заряд  $q_3 = -10$  нКл, помещенный между зарядами  $q_1$  и  $q_2$  на расстоянии  $r = 5$  см от заряда  $q_1$ .

Дано:

$$q_1 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_2 = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_3 = -1 \cdot 10^{-8} \text{ Кл};$$

$$r = 0,05 \text{ м};$$

$$d = 0,2 \text{ м};$$

$$\epsilon = 1;$$

$$d = 0,2 \text{ м};$$

$$r = 0,05 \text{ м}$$

$$\text{Найти: } \vec{F}$$

**Решение.** Результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд  $q_3$  со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , равна векторной сумме сил  $\vec{F}_{31}$  и  $\vec{F}_{32}$ , действующих со стороны каждого заряда на заряд  $q_3$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \quad (1)$$

Используя закон Кулона (3.2), найдем модули этих сил:

$$F_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_1||q_3|}{r^2}, \quad F_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_2||q_3|}{(d-r)^2}. \quad (2)$$

Так как  $F_{31} > F_{32}$ , то результирующая сила  $\vec{F}$  будет направлена в сторону силы  $\vec{F}_{31}$ . Выберем в этом направлении ось  $Ox$  и спроецируем уравнение (1) на эту ось (рис. 20):

$$F = F_{31} - F_{32}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) в уравнение (3), получим модуль равнодействующей силы  $\vec{F}$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_1||q_3|}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_2||q_3|}{(d-r)^2} = \frac{|q_3|}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{|q_1|}{r^2} - \frac{|q_2|}{(d-r)^2} \right). \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

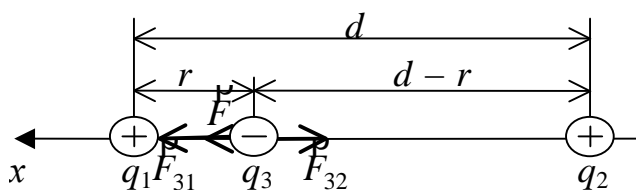


Рис. 20

$$1 \text{ Н} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м}} \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{Кл}^2 \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Кл} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 1 \text{ Н}.$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$F = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left( \frac{5 \cdot 10^{-9}}{0,05^2} - \frac{3 \cdot 10^{-9}}{0,15^2} \right) = 2,07 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

**Пример 2. Равновесие системы электрических зарядов.** В каждой из вершин квадрата находятся одинаковые положительные заряды. Величина каждого из них  $q = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл. Какой точечный заряд  $q_0$  по величине и знаку надо расположить в точке пересечения диагоналей квадрата со стороной  $a$ , чтобы эта система зарядов находилась в равновесии?

Дано:  
 $q = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл  
 Найти:  $q_0$

*Решение.* Каждый из четырех зарядов, расположенных в вершинах квадрата, находится в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно рассмотреть равновесие одного из этих зарядов, например  $q_4$  (рис. 21). Заряд  $q_4$  взаимодействует с каждым из остальных зарядов системы согласно закону Кулона (3.1). Учитывая

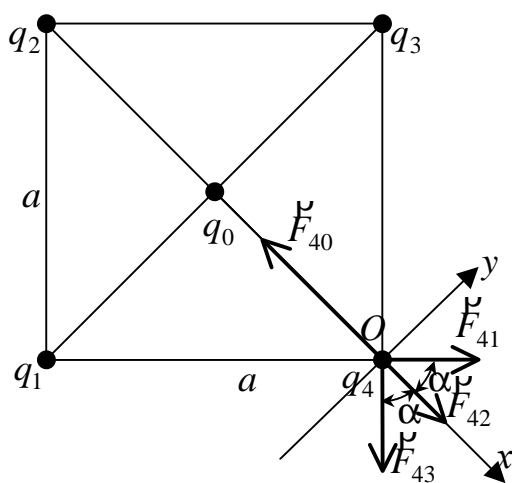


Рис. 21

направления сил  $\vec{F}_{41}$ ,  $\vec{F}_{42}$ ,  $\vec{F}_{43}$ , можно сделать вывод, что заряд  $q_4$  будет находиться в равновесии лишь в том случае, если заряд  $q_0$  будет отрицательным.

Запишем условие равновесия заряда  $q_4$ :

$$\vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{40} = 0. \quad (1)$$

Для выбранной на рис. 21 ориентации осей  $Ox$  и  $Oy$ , учитывающей симметрию расположения сил, достаточно рассмотреть проекцию векторного

уравнения (1) только на ось  $x$ :

$$F_{43} \cos \alpha + F_{41} \cos \alpha + F_{42} = F_{40}. \quad (2)$$

По закону Кулона (3.2) определим модули всех сил:

$$F_{43} = F_{41} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q^2}{a^2}, \quad F_{42} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q^2}{2a^2}, \quad F_{40} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{2|q_0|q}{a^2}.$$

Подставляя найденные выражения сил в уравнение (2), получим

$$q_0 = \frac{4 \cos \alpha + 1}{4} q = \frac{4 \cos 45^\circ + 1}{4} 4 \cdot 10^{-7} = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ Кл.} \quad (3)$$

Обратим внимание на такой факт. Достаточно какому-нибудь заряду рассматриваемой системы выйти из исходного положения, как все заряды придут в движение и равновесие их нарушится, т. е. система находится в состоянии *неустойчивого* равновесия. Под действием только сил электростатического поля заряды системы не смогут вернуться в исходное положение.

**Пример 3. Принцип суперпозиции электрических полей для системы точечных зарядов.** Электрическое поле создано в вакууме двумя точечными зарядами  $q_1 = 2 \text{ нКл}$  и  $q_2 = -3 \text{ нКл}$ . Расстояние между зарядами  $d = 20 \text{ см}$ . Определить напряженность  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  электрического поля в точке  $A$  (рис. 22), находящейся на расстоянии  $r_1 = 15 \text{ см}$  от первого и  $r_2 = 10 \text{ см}$  от второго заряда.

*Дано:*

$$q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_2 = -3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$d = 0,2 \text{ м};$$

$$r_1 = 0,15 \text{ м};$$

$$r_2 = 0,1 \text{ м}$$

*Найти:*  $E$

*Решение.* Согласно принципу суперпозиции (3.6), каждый заряд создает свое электрическое поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность  $\vec{E}$  результирующего поля в каждой его точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  полей каждого заряда:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (1)$$

Модули напряженностей полей в вакууме в точке  $A$  находятся по формуле (3.5) при  $\epsilon = 1$ :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r_2^2}. \quad (2)$$

Для определения направлений напряженностей

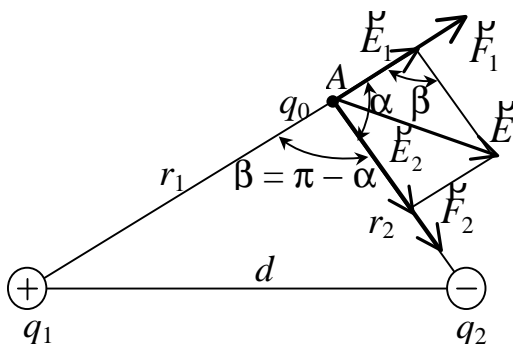


Рис. 22



поместим в точку  $A$  пробный заряд  $q_0 > 0$ . Вектор  $\vec{E}_1$  в точке  $A$  направлен от заряда  $q_1$ , т. к. между положительными зарядами  $q_1$  и  $q_0$  возникает сила отталкивания  $\vec{F}_1$  ( $\vec{F}_1 = q_0 \vec{E}_1$ , формула (3.3)). Вектор  $\vec{E}_2$  направлен к заряду  $q_2$ , т. к. отрицательный заряд  $q_2$  притягивает заряд  $q_0$  ( $\vec{F}_2 = q_0 \vec{E}_2$ ).

После графического сложения векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  (уравнение (1)) получаем треугольник, поэтому модуль  $E$  найдем по теореме косинусов с учетом выражений (2):

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{|q_1|^2}{r_1^4} + \frac{|q_2|^2}{r_2^4} + \frac{2|q_1||q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos\alpha}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ ;  $\cos \beta = \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .

Для треугольника со сторонами  $r_1$ ,  $r_2$  и  $d$  запишем теорему косинусов и найдем  $\cos \alpha = -\cos (\pi - \alpha)$ :

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi - \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = (d^2 - r_1^2 - r_2^2)/(2r_1r_2). \quad (4)$$

Потенциал  $\phi$  результирующего поля зарядов  $q_1$  и  $q_2$  также определяем по принципу суперпозиции (3.6):

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (5)$$

Потенциалы полей точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в точке  $A$ , определяем по формуле (3.4) при  $\epsilon = 1$ :

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} > 0, \text{ т. к. } q_1 > 0; \quad \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} < 0, \text{ т. к. } q_2 < 0. \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в уравнение (5), получаем

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right). \quad (7)$$

Рассчитаем значение  $\cos \alpha$  по формуле (4):

$$\cos \alpha = (0,2^2 - 0,15^2 - 0,1^2)/(2 \cdot 0,15 \cdot 0,1) = 0,25.$$

Подставив числовые значения всех величин в формулы (3) и (7), найдем модуль напряженности  $\vec{E}$  и потенциал  $\phi$  результирующего поля:

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,15)^4} + \frac{(3 \cdot 10^{-9})^2}{(0,1)^4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-9} \cdot 0,25}{(0,15)^2 (0,1)^2}} = 3 \text{ кВ/м.}$$

$$\phi_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left( \frac{2 \cdot 10^{-9}}{15 \cdot 10^{-2}} + \frac{(-3 \cdot 10^{-9})}{10 \cdot 10^{-2}} \right) = -150 \text{ В.}$$

**Пример 4. Расчет электростатического поля, создаваемого зарядом, равномерно распределенным по стержню.** Тонкий стержень длиной  $l = 30$  см. (рис. 23) равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 1$  мкКл/м. В точке  $A$  на расстоянии  $r_0 = 20$  см от стержня находится точечный заряд  $q_1 = 10$  нКл. Заряд равноудален от концов стержня. Определить силу взаимодействия заряда  $q_1$  с заряженным стержнем в вакууме.

*Дано:*

$$l = 0,3 \text{ м;}$$

$$r_0 = 0,2 \text{ м;}$$

$$\tau = 10^{-6} \text{ Кл/м;}$$

$$q_1 = 10^{-8} \text{ Кл;}$$

$$\epsilon = 1$$

*Найти:*  $\vec{F}$

*Решение.* Силу взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем будем искать, используя формулу (3.3):

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}, \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля заряженного стержня в точке  $A$ .

Напряженность  $\vec{E}$  поля заряженного стержня в точке  $A$  найдем по формуле (3.7), т.е. по принципу суперпозиции. Выберем систему координат с центром  $O$  в середине стержня (рис. 23) и на расстоянии  $x$  от точки  $O$  выделим на стержне элементарный участок длиной  $dx$ . Его заряд  $dq = \tau dx$  (см. выражение (3.8)) можно рассматривать как точечный, поэтому напряженность поля находим по формуле (3.5):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{\tau dx}{r^2}, \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние от выделенного элемента  $dx$  до точки  $A$ .

Проекции  $E_x$  и  $E_y$  результирующего поля находим по формуле (3.7):

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin \alpha \text{ и } E_y = \int dE_y = \int dE \cos \alpha. \quad (3)$$

Из рис. 23 видно, что

$$r = \sqrt{r_0^2 + x^2}, \quad \sin \alpha = x/r, \quad \cos \alpha = r_0/r. \quad (4)$$

Подставим выражения (2) и (4) в формулы (3). Вычисляя интеграл по  $x$  в пределах от  $-l/2$  до  $+l/2$  и используя подстановку  $t = x^2$  ( $dt = 2x dx$ ), находим проекции  $E_x$  и  $E_y$ :

$$E_x = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\tau x dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon \cdot 2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(r_0^2 + t)^{3/2}} = \frac{-\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{-l/2}^{+l/2};$$

$$E_y = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\tau r_0 dx}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\tau r_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left[ \frac{x}{r_0(r_0^2 + x^2)^{1/2}} \right]_{-l/2}^{+l/2} =$$

$$= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_0(r_0^2 + (l/2)^2)^{1/2}} [l/2 - (-l/2)] = \frac{\tau l}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_0(4r_0^2 + l^2)^{1/2}}.$$

Поскольку проекция  $E_x = 0$ , то модуль напряженности  $\vec{E}$  равен  $E_y$  ( $E_y > 0$ ), а сила отталкивания

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_y \Rightarrow F = \frac{q_1 \tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_0} \cdot \frac{l}{(4r_0^2 + l^2)^{1/2}}. \quad (6)$$

Единицы измерения числителя и знаменателя формулы (6) совпадают с единицами измерения числителя и знаменателя в формуле (3.2) из раздела «Основные понятия и формулы», поэтому проверку единиц измерения проводить не будем.

Подставив числовые значения в формулу (6), получим

$$F = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0,2} \cdot \frac{0,3}{\sqrt{4 \cdot (0,2)^2 + (0,3)^2}} \text{ Н} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 540 \text{ мкН}.$$

**Пример 5. Применение теорема Гаусса для расчета электрических полей.** Две concentric проводящие сферы (рис. 24) радиусами  $R_1 = 6$  см и  $R_2 = 10$  см несут соответственно заряды  $q_1 = 1$  нКл и  $q_2 = -0,5$  нКл. Определить напряженность  $\vec{E}$  поля в вакууме в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях  $r_1 = 5$  см,  $r_2 = 9$  см,  $r_3 = 15$  см.

*Дано:*

$$R_1 = 0,06 \text{ м};$$

$$R_2 = 0,1 \text{ м};$$

$$q_1 = 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$q_2 = -0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл};$$

$$r_1 = 0,05 \text{ м};$$

$$r_2 = 0,09 \text{ м};$$

$$r_3 = 0,15 \text{ м}; \epsilon = 1$$

*Найти:*  $E_1; E_2; E_3$

*Решение.* Для нахождения напряженности результирующего электрического поля заряженных сфер будем использовать теорему Гаусса (3.12) при  $\epsilon = 1$ :

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1)$$

Далее будем учитывать, что, поскольку сферы проводящие, то заряды распределяются по их поверхности равномерно. В связи с этим электрические поля заряженных сфер будут центрально-симметричными.

1. Для определения напряженности  $E_1$  в области I выберем замкнутую поверхность  $S_1$  в виде сферы радиусом  $r_1 < R_1$ . Суммарный заряд  $q$  ( $q = \sum q_i$ ), находящийся внутри выбранной гауссовой поверхности  $S_1$ , равен нулю, поэтому в соответствии с уравнением (1) получим

$$\oint_{S_1} \vec{E}_n dS = 0. \quad (2)$$

Так как поле центрально-симметричное, то в любой точке на поверхности сферы  $S_1$  напряженность  $\vec{E}$  совпадает с нормалью и одинакова по модулю. Поэтому проекция на нормаль  $E_n = E_1 = \text{const}$ .

Следовательно,

$$E_1 \oint_{S_1} dS = 0 \Rightarrow E_1 = 0. \quad (3)$$

Напряженность поля во всех точках области I равна нулю.

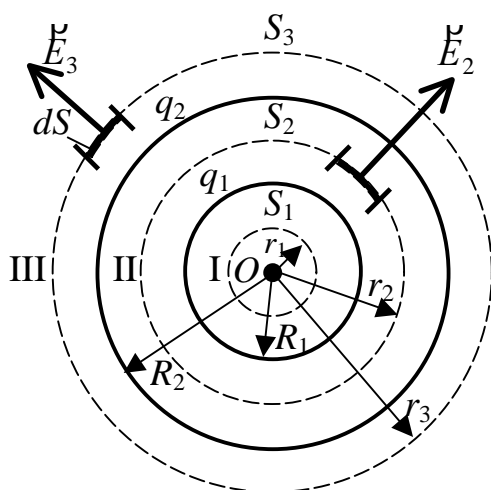


Рис. 24

2. В области II проведем гауссову сферу радиусом  $r_2$  ( $R_1 < r_2 < R_2$ ). Заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности  $S_2$ , равен  $q_1$ ,  
 $E_n = E_2 = \text{const}$ , поэтому с помощью теоремы Гаусса (1) получаем, что

$$\int_{S_2} E_n dS = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (4)$$

3. В области III выбираем сферу радиусом  $r_3 > R_2$ . Обозначим проекцию  $E_n$  напряженности поля в области III через  $E_3 = \text{const}$  и учтем, что внутри поверхности  $S_3$  находятся заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Тогда по теореме Гаусса получим

$$E_3 \oint_{S_3} dS = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0 S_3} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}. \quad (5)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формул (4) и (5):

$$1 \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Подставив числовые значения в формулы (4), (5), получим

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^9}{(0,09)^2} = 1,11 \text{ кВ/м}; \quad E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1-0,5) 10^{-9}}{(0,15)^2} = 200 \text{ В/м}.$$

**Пример 6. Расчет потенциала поля равномерно распределенного заряда.** Электрическое поле в вакууме создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд с плотностью  $\tau = 0,1$  мкКл/м. Определить потенциал поля в точке  $A$ , удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Дано:

$$\tau = 10^{-7} \text{ Кл/м}$$

Найти:  $\phi$

*Решение.* Заряд, находящийся на стержне, нельзя считать точечным, т. к. расстояние от него до точки  $A$ , в которой определяется потенциал, сравнимо с длиной стержня. Если разбить стержень на

элементарные отрезки  $dl$ , то заряд  $dq = \tau dl$  (см. формулу (3.8)), находящийся на каждом из них, можно рассматривать как точечный. Поэтому потенциал  $d\phi$  на расстоянии  $r$  заряда  $dq$  определяем по формуле (3.4): при  $\epsilon = 1$ :

$$d\varphi = \tau dl / (4\pi\epsilon_0 r). \quad (1)$$

Из рис. 25 следует, что элемент дуги  $dS$  радиуса  $r$  ( $dS = r d\alpha$ ) связан с элементом длины  $dl$  стержня:

$$dl \cos \alpha = r d\alpha \Rightarrow dl = r d\alpha / \cos \alpha. \quad (2)$$

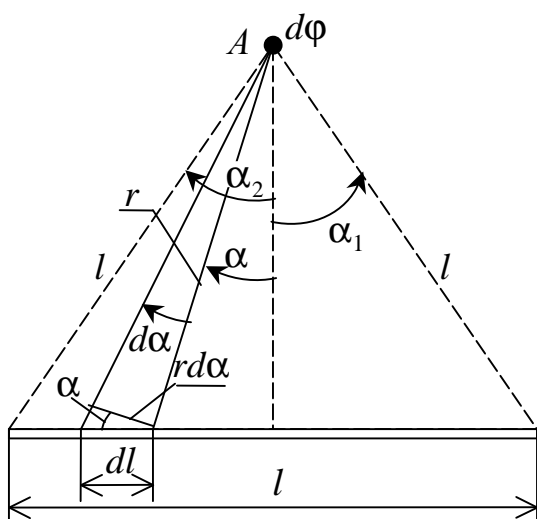


Рис. 25

Подставим выражение (2) в формулу (1) и выполним интегрирование полученного выражения

по углу  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , т. е. применим принцип суперпозиции (3.7):

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}. (3)$$

В силу симметрии  
расположения точки  $A$   
относительно концов стержня ( $\alpha_1 =$   
 $-\alpha_2$ ) интеграл (3) можно  
и воспользо-

преобразовать

льзоваться табличным интегралом  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Тогда

получим потенциал  $\varphi$  в точке  $A$

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \\ &= \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} (\ln \operatorname{tg} \pi/3 - \ln \operatorname{tg} \pi/4) = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \operatorname{tg}(\pi/3).\end{aligned}\quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$1\text{ B} = \frac{1\text{ Кл/М}}{1\text{ Ф/М}} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{Ф}} = 1\text{ В}.$$

После подстановки числовых значений в формулу (4) найдем

$$\Phi = 2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \ln 1,73 = 1,8 \cdot 10^3 \cdot 0,55 = 990 \text{ В.}$$

**Пример 7. Связь напряженности электростатического поля с потенциалом.** Электрическое поле в воздухе ( $\epsilon; 1$ ) создано длинным

цилиндром радиуса  $R = 1$  см, равномерно заряженным с линейной плотностью  $\tau = 20$  нКл/м (рис. 26). Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии  $a_1 = 0,5$  см и  $a_2 = 2$  см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Дано:

$$R = 0,01 \text{ м};$$

$$a_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$a_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\tau = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}$$

Найти:  $(\varphi_1 - \varphi_2)$

записать в виде (3.15):

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся уравнением связи (3.13) между напряженностью  $\vec{E}$  электростатического поля и потенциалом  $\varphi$ , которое для поля с осевой симметрией (каким и является поле длинного цилиндра) можно

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow E = -d\varphi/dr \Rightarrow d\varphi = -E dr. \quad (1)$$

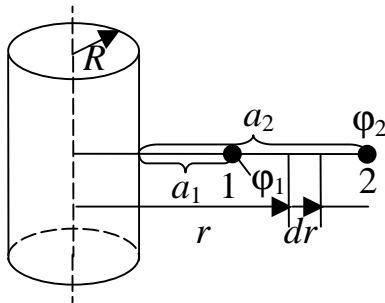


Рис. 26

Так как цилиндр длинный и точки поля взяты вблизи его средней части, то можно воспользоваться формулой (3.16) при  $\epsilon = 1$  для напряженности поля, создаваемого бесконечно длинной нитью или цилиндром при  $r > R$ :

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r). \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в дифференциальное соотношение (1) и выполнив интегрирование, получим

$$d\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R + a_2}{R + a_1}. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (3):

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Кл/м}}{1 \text{ Ф/м}} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{Ф}} = 1 \text{ В}.$$

Подставив числовые значения в формулу (3), получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \ln (3/1,5) = 250 \text{ В}.$$

**Пример 8. Движение заряженных частиц в электростатическом поле.** Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов

$U_0 = 10$  кВ, при прохождении через плоский горизонтально расположенный незаряженный конденсатор параллельно его

пластинам дает светящееся пятно в точке  $B$  флуоресцирующего экрана  $PQ$  (рис. 27). Расстояние между пластинами  $d = 2$  см. Длина пластин конденсатора  $l_1 = 20$  см. При зарядке конденсатора до разности потенциалов  $U_1 = 100$  В светящееся пятно смещается на расстояние  $BC$ . Определить расстояние  $BC$ , если экран  $PQ$  отстоит от конденсатора на расстоянии  $l_2 = 0,1$  м. Действием силы тяжести пренебречь.

*Дано:*

$$U_0 = 10^4 \text{ В};$$

$$U_1 = 100 \text{ В};$$

$$d = 0,02 \text{ м};$$

$$l_1 = 0,2 \text{ м};$$

$$l_2 = 0,1 \text{ м}$$

*Найти:  $BC$*

*Решение.* Движение электрона можно разделить на две части: внутри конденсатора и вне него. Движение электрона внутри конденсатора можно разложить на два движения:

а) движение по инерции в горизонтальном направлении с постоянной скоростью  $v_1$ , приобретенной под действием разности потенциалов  $U_0$  между катодом и анодом;

б) равноускоренное движение в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы ( $F = qE$ ) поля конденсатора.

После выхода из конденсатора электрон движется равномерно со скоростью  $v_2$ , которую он имел в точке  $M$  в момент вылета из конденсатора.

Из рис. 27 видно, что искомое расстояние

$$BC = h_1 + h_2, \quad (1)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – расстояния, на которое сместятся электроны в вертикальном направлении во время движения в конденсаторе и вне его.

Используя закон Ньютона, определим ускорение  $a$  и расстояние  $h_1$ :

$$a = F/m \Rightarrow h_1 = at_1^2/2 = Ft_1^2/(2m), \quad (2)$$

где  $t_1$  – время полета электрона внутри конденсатора.

С помощью формул (3.3) и (3.14) модуль силы  $F$  выразим через напряжение  $U_1$ :

$$F = eE = eU_1/d, \quad (3)$$

где  $e$  – элементарный заряд.

Время  $t_1$  полета электрона в конденсаторе найдем по формуле равномерного движения в горизонтальном направлении:



$$l_1 = v_1 t_1 \Rightarrow t_1 = l_1 / v_1, \quad (4)$$

Используя теорему об изменении кинетической энергии электрона между катодом и анодом и формулу (3.17) для работы сил поля конденсатора, найдем скорость  $v_1$ , полагая, что начальная скорость

$v_0 = 0$ :

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad A = eU_0 \Rightarrow v_1^2 = 2eU_0/m. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (2) для  $h_1$  последовательно  $F$ ,  $t_1$  и  $v_1^2$  соответственно из выражений (3), (4) и (5), получим

$$h_1 = eU_1 l_1^2 / (2mv_1^2 d) = U_1 l_1^2 / (4U_0 d). \quad (6)$$

Проекцию скорости  $v_{2y}$  найдем по формуле равноускоренного движения ( $v_{2y} = at_1$ ), которая с учетом выражений (3) и (4) примет следующий вид:

$$v_{2y} = eU_1 l_1 / (mv_1 d). \quad (7)$$

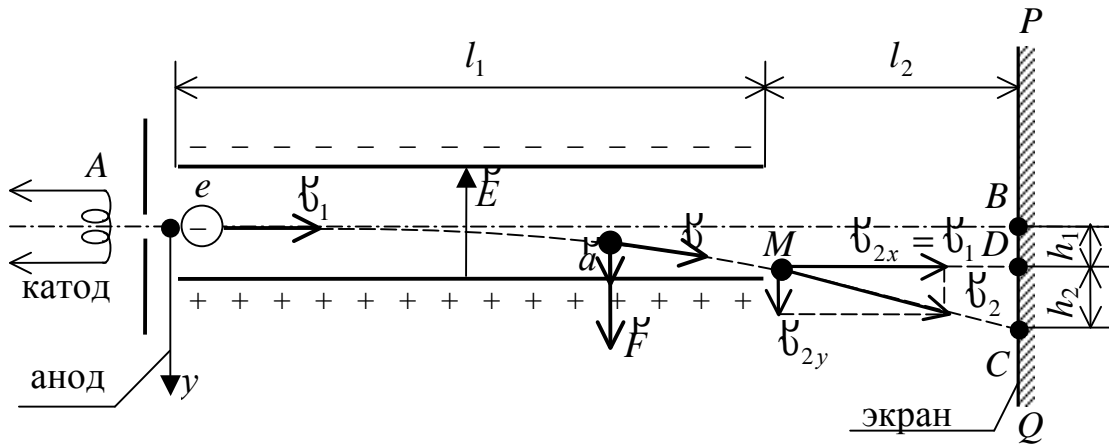


Рис. 27

Время движения  $t_2$  на прямолинейном участке  $MC$  и расстояние  $h_2$  найдем по формулам равномерного движения:

$$t_2 = \frac{l_2}{v_{2x}} = \frac{l_2}{v_1}, \quad h_2 = v_{2y} t_2 = \frac{eU_1 l_1}{mv_1 d} \frac{l_2}{v_1} = \frac{eU_1 l_1 l_2}{m d v_1^2} = \frac{U_1 l_1 l_2}{2U_0 d}. \quad (8)$$

Формулы (6) и (8) для  $h_1$  и  $h_2$  подставим в выражение (1):

$$BC = h_1 + h_2 = \frac{U_1 l_1^2}{4U_0 d} + \frac{U_1 l_1 l_2}{2U_0 d} = \frac{U_1 l_1}{2U_0 d} \left( \frac{l_1}{2} + l_2 \right). \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что единицы измерения левой и правой частей одинаковы ( $1 \text{ м} = 1 \text{ м}$ ).

Подставив числовые значения величин в формулу (9), получим

$$BC = \frac{100 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,2} \left( \frac{0,2}{2} + 0,1 \right) = 0,01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

**Пример 9. Энергия заряженного конденсатора.** Конденсатор емкостью  $C_1 = 3 \text{ мкФ}$  был заряжен до разности потенциалов  $40 \text{ В}$ . После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью  $C_2 = 5 \text{ мкФ}$ . Какое количество энергии первого конденсатора израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

*Дано:*

$$C_1 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$C_2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф};$$

$$U_1 = 40 \text{ В}$$

*Найти:*  $\Delta W$

*Решение.* На основании закона сохранения энергии определим энергию  $\Delta W$ , израсходованную на образование искры:

$$\Delta W = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где  $W_1$  – начальная энергия первого конденсатора;  $W_2$  – энергия батареи, составленной из первого и второго конденсаторов.

По формуле (3.24) энергия конденсатора или батареи

$$W = CU^2/2, \quad (2)$$

где  $C$  – емкость конденсатора или батареи конденсаторов;  $U$  – напряжение между обкладками конденсатора или на зажимах батареи.

Принимая во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов (3.22), получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) U_2^2}{2}, \quad (3)$$

где  $U_2$  – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд батареи равен заряду первого конденсатора до присоединения второго (закон сохранения заряда) и используя (3.18), выразим  $U_2$ :

$$q = C_1 U_1 = (C_1 + C_2) U_2 \Rightarrow U_2 = C_1 U_1 / (C_1 + C_2).$$

Подставив выражение для  $U_2$  в формулу (3), получим

$$\Delta W = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_2^2}{2(C_1 + C_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2. \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$1 \text{ Дж} = \frac{1 \text{ Ф}^2}{1 \text{ Ф}} \cdot 1 \text{ В}^2 = 1 \text{ Ф} \cdot \text{В}^2 = 1 \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1 \text{ Дж}.$$

Подставив в выражение (4) числовые значения, получим

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$$

**Пример 10. Применение законов Ома для расчета электрических цепей постоянного тока.** Потенциометр с сопротивлением  $R_{\Pi} = 100 \text{ Ом}$  подключен к батарее, ЭДС которой  $\mathcal{E} = 150 \text{ В}$  и внутреннее сопротивление  $r = 50 \text{ Ом}$ . Определить показание вольтметра с сопротивлением  $R_V = 500 \text{ Ом}$ , подключенного к одной из клемм потенциометра, и подвижным контактом, установленным посередине потенциометра.

*Дано:*  
 $R_{\Pi} = 100 \text{ Ом};$   
 $\mathcal{E} = 150 \text{ В};$   
 $r = 50 \text{ Ом};$   
 $R_V = 500 \text{ Ом}$   
*Найти:*  $U_1$

*Решение.* Показание  $U_1$  вольтметра, подключенного к точкам  $C$  и  $B$  (рис. 28), определяем, используя закон Ома (3.29) для однородного участка цепи  $CB$ , состоящего из параллельно соединенных вольтметра и правой половины потенциометра:

$$U_1 = I R_1. \quad (1)$$

Полное сопротивление  $R_1$  этого участка рассчитаем по формуле (3.34):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_{\Pi}/2} \Rightarrow R_1 = \frac{R_{\Pi} R_V}{R_{\Pi} + 2R_V}. \quad (2)$$

Подставив числовые значения в выражение (2), получим

$$R_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом}.$$

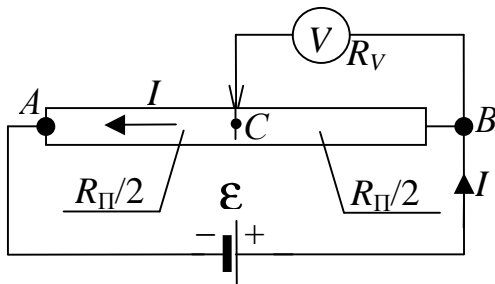


Рис. 28

Силу тока  $I$  неразветвленной части цепи найдем по закону Ома (3.30) для замкнутой цепи:

$$I = \mathcal{E} / (R + r). \quad (3)$$

Сопротивление внешней цепи батареи  $R$  равно сумме сопротивления участка  $AC$  потенциометра и сопротивления  $R_1$ :

$$R = R_{\Pi} / 2 + R_1. \quad (4)$$

Выражение (4) подставим в формулу (3) и проведем расчеты:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\Pi} / 2 + R_1 + r} = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} = 1,03 \text{ A}.$$

Подставив значения  $I$  и  $R_1$  в формулу (1), получим

$$U_1 = 1,03 \cdot 45,5 = 46,9 \text{ В}.$$

**Пример 11. Применение правил Кирхгофа для расчета разветвленных электрических цепей постоянного тока.** Элементы  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  включены в цепь, как показано на рис. 29. Определить силы токов, текущих в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$ , если  $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$ , а  $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом}$  и  $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$ . Сопротивлениями элементов пренебечь.

*Дано:*  
 $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В};$   
 $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В};$   
 $R_1 = R_4 = 2 \text{ Ом};$   
 $R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$   
*Найти:*  $I_2; I_3$

*Решение.* Укажем предполагаемые направления силы токов в ветвях разветвленной цепи (рис. 29). Их значения можно рассчитать с помощью правил Кирхгофа (3.38, 3.39).

При составлении уравнений по первому правилу Кирхгофа необходимо соблюдать *правило знаков*: сила тока, втекающего в узел, входит в уравнение со знаком «плюс»; а сила тока, вытекающего из узла, – со знаком «минус».

По первому закону Кирхгофа (3.38) для узла  $B$  имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (1)$$

Видно, что уравнение для узла  $A$  будет отличаться от уравнения (1) только знаками, поэтому его не записываем. Для четырех неизвестных сил токов три недостающих уравнения составляем по второму правилу Кирхгофа для замкнутых контуров, которые будем обходить по часовой стрелке. Чтобы составить необходимое число

независимых уравнений, следует придерживаться правила: *нужно выбирать контуры таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь, не принадлежавшая ни одному из ранее использованных контуров.*

При использовании второго правила Кирхгофа необходимо соблюдать следующие правила знаков:

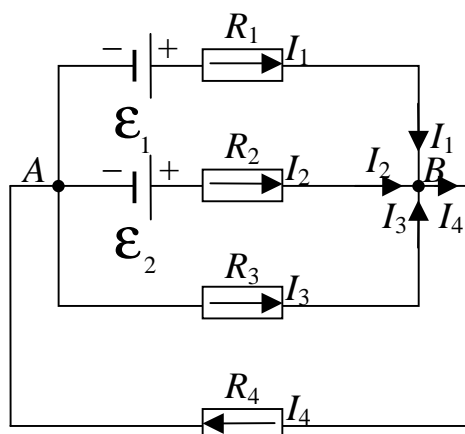


Рис. 29

а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контуров, то соответствующее произведение  $IR$  входит в уравнение со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус»;

б) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе контура приходится идти от минуса к плюсу внутри источника, то соответствующая ЭДС входит в уравнение со знаком

«плюс», в про-

тивном случае – со знаком «минус».

По второму правилу Кирхгофа (3.39) имеем:  
для контура  $AR_1BR_2A$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = -\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1; \quad (2)$$

для контура  $AR_1BR_3A$

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_1; \quad (3)$$

для контура  $AR_3BR_4A$

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0. \quad (4)$$

Подставив в уравнения (2)–(4) числовые значения сопротивлений и ЭДС, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0, \\ 2I_1 - 4I_2 = 6, \\ 2I_1 - 4I_3 = 10, \\ 4I_3 - 2I_4 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решив систему (5), получаем  $I_2 = 0$  А и  $I_3 = -1$  А. Знак «минус» в числовом значении силы тока  $I_3$  свидетельствует о том, что направление тока  $I_3$  противоположно указанному на рисунке.

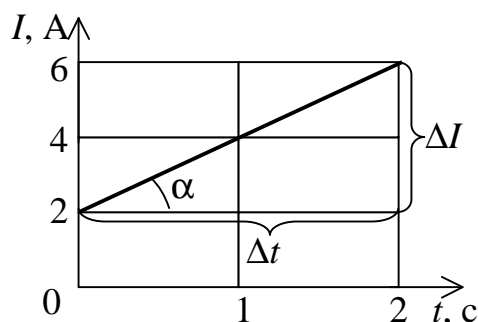


Рис. 30

**Пример 12. Определение заряда и количества теплоты, выделяющейся в цепи с изменяющейся силой тока.** Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом нарастает по линейному закону от  $I_0 = 2$  А до  $I_2 = 6$  А (рис. 30). Определить теплоту  $Q$ , выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, а также заряд  $q$ , прошедший через поперечное сечение проводника за вторую секунду.

*Дано:*  
 $R = 20$  Ом;  
 $\Delta t = 2$  с;  
 $I_0 = 2$  А;  
 $I_2 = 6$  А;  
 $t_0 = 0$  с;  
 $t_1 = 1$  с;  
 $t_2 = 2$  с

*Найти:*  $Q$ ;  $q$

*Решение.* Так как сила тока изменяется во времени, то закон Джоуля – Ленца (3.36) записываем в виде

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt. \quad (1)$$

Поскольку ток  $I$  линейно зависит от времени, то

$$I = I_0 + kt, \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  численно равен изменению силы тока в единицу времени:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{6 - 2}{2 - 0} = 2 \text{ А/с}. \quad (3)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1) и выполним интегрирование:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_1} (I_0 + kt)^2 R dt = \frac{(I_0 + kt)^3}{3k} R \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{R}{3k} [(I_0 + kt_1)^3 - (I_0 + kt_0)^3] = \\ &= \frac{20}{3 \cdot 2} [(2 + 2 \cdot 1)^3 - 2^3] = 186,7 \text{ Дж}. \end{aligned} \quad (4)$$

Элементарный заряд  $dq$ , прошедший за время  $dt$  через поперечное сечение проводника, найдем, используя формулу (3.26):

$$dq = Idt. \quad (5)$$

Для определения заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за вторую секунду, надо проинтегрировать выражение (5) в пределах от  $t_1 = 1$  с до  $t_2 = 2$  с:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = \int_{t_1}^{t_2} (I_0 + kt) dt = I_0 t + \frac{kt^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = I_0(t_2 - t_1) + \frac{k}{2}(t_2^2 - t_1^2) =$$

$$= 2 \cdot (2 - 1) + \frac{2}{2}(2^2 - 1^2) = 5 \text{ Кл.}$$

### 3.5. Задачи к контрольной работе № 3

**Таблица вариантов заданий  
для студентов инженерно-технических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	21	31	41	61	71	81	91
2	2	22	32	42	62	72	82	92
3	3	23	33	43	63	73	83	93
4	4	24	34	44	64	74	84	94
5	5	25	35	45	65	75	85	95
6	6	26	36	46	66	76	86	96
7	7	27	37	47	67	77	87	97
8	8	28	38	48	68	78	88	98
9	9	29	39	49	69	79	89	99
0	10	30	40	50	70	80	90	100

**Таблица вариантов заданий  
для студентов химико-технологических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	31	41	51	61	71	91
2	2	12	32	42	52	62	72	92
3	3	13	33	43	53	63	73	93
4	4	14	34	44	54	64	74	94
5	5	15	35	45	55	65	75	95
6	6	16	36	46	56	66	76	96
7	7	17	37	47	57	67	77	97
8	8	18	38	48	58	68	78	98
9	9	19	39	49	59	69	79	99
0	10	20	40	50	60	70	80	100

### Тема 1. Закон Кулона

1. Точечные заряды  $q_1 = 20$  нКл,  $q_2 = -10$  нКл находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2$  на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Определите напряженность поля в точке, удаленной на  $r_1 = 3$  см от первого и на  $r_2 = 4$  см от второго заряда. Определите также силу  $F$ , действующую в этой точке на точечный заряд  $q = 1$  нКл.

2. Три одинаковых точечных заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = 2$  нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами  $a = 1$  см. Определите модуль и направление силы  $F$ , действующей на один из зарядов со стороны двух других. Заряды находятся в вакууме.

3. Два положительных точечных заряда  $q$  и  $9q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Какой заряд и где надо поместить, чтобы система зарядов была в равновесии?

4. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол  $\alpha$ . Шарики погружают в масло. Какова плотность  $\rho$  масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков  $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, диэлектрическая проницаемость масла  $\epsilon = 2,2$ .

5. Четыре одинаковых заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 40$  нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см. Найдите силу  $F$ , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных. Заряды находятся в вакууме.

6. Три заряда  $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-8}$  Кл располагают в вершинах равностороннего треугольника. Где и какой заряд  $q_0$  надо поместить, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

7. В вершинах правильного шестиугольника находятся заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 1$  мкКл. Какой заряд  $q_0$  и где следует поместить, чтобы вся система была в равновесии?

8. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$  Кл. Какой заряд  $q_0$  надо поместить в центр квадрата, чтобы система зарядов была в равновесии?

9. На каком расстоянии от шарика, имеющего заряд  $q = 7 \cdot 10^{-9}$  Кл и подвешенного на нити в жидкости с плотностью  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup> и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2,1$ , расположена железная пылинка объемом  $V = 9 \cdot 10^{-9}$  м<sup>3</sup>, имеющая заряд  $q = -2,1 \cdot 10^{-9}$  Кл, если вся система находится в равновесии?

10. На расстоянии  $d = 20$  см в вакууме находятся два точечных заряда:  $q_1 = 50$  нКл и  $q_2 = 100$  нКл. Определите силу  $F$ , действующую на заряд  $q_3 = -10$  нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое



расстояние  $l$ , равное 15 см.

## **Тема 2. Принцип суперпозиции для полей, создаваемых точечными зарядами**

11. В вершинах правильного шестиугольника в вакууме расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найдите напряженность электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Сторона шестиугольника  $a = 3$  см, величина каждого заряда  $q = 1,5$  нКл.

12. В однородном поле с напряженностью  $E_0 = 40$  кВ/м находится заряд  $q = 27$  нКл. Найдите напряженность  $E$  результирующего поля на расстоянии  $r = 9$  см от заряда в точках: а) лежащих на силовой линии, проходящей через заряд; б) лежащих на прямой, проходящей через заряд перпендикулярно силовым линиям.

13. Точечные заряды  $q_1 = 30$  нКл и  $q_2 = -20$  нКл находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2,5$  на расстоянии  $d = 20$  см друг от друга. Определите напряженность электрического поля  $E$  в точке, удаленной от первого заряда на расстояние  $r_1 = 30$  см, а от второго – на  $r_2 = 15$  см.

14. Ромб составлен из двух равносторонних треугольников со стороной  $a = 0,2$  м. В вершинах при острых углах помещены заряды  $q_1 = q_2 = 6 \cdot 10^{-8}$  Кл. В вершине одного тупого угла помещен заряд  $q_3 = -8 \cdot 10^{-8}$  Кл. Найдите напряженность электрического поля  $E$  в четвертой вершине. Заряды находятся в вакууме.

15. Одинаковые по величине, но разные по знаку заряды  $q_1 = q_2 = 1,8 \cdot 10^{-8}$  Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 0,2$  м. Найдите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника. Заряды находятся в вакууме.

16. В трех вершинах квадрата со стороной  $a = 0,4$  м в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,6$  находятся заряды  $q_1 = q_2 = q_3 = 5 \cdot 10^{-6}$  Кл. Найдите напряженность  $E$  в четвертой вершине.

17. Заряды  $q_1 = 7,5$  нКл и  $q_2 = -14,7$  нКл расположены в вакууме на расстоянии  $d = 5$  см друг от друга. Найдите напряженность электрического поля в точке на расстоянии  $r_1 = 3$  см от положительного заряда и  $r_2 = 4$  см от отрицательного заряда.

18. Два точечных заряда  $q_1 = 2q$  и  $q_2 = -3q$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. Найдите положение точки, в которой напряженность поля  $E$  равна нулю.

19. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной  $a = 0,3$  м в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,5$  находятся заряды величиной  $q_1 = q_2 = 2 \cdot 10^{-7}$  Кл. Найдите напряженность  $E$  и потенциал электрического поля  $\phi$  в двух других вершинах квадрата.

20. Найдите напряженность электрического поля  $E$  в точке, лежащей посередине между точечными зарядами  $q_1 = 8 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = 6 \cdot 10^{-9}$  Кл, расположенными в вакууме на расстоянии  $r = 12$  см, в случае а) одноименных зарядов; б) разноименных зарядов.

### ***Тема 3. Принцип суперпозиции для полей, создаваемых распределенным зарядом***

21. Тонкий стержень длиной  $l = 20$  см несет равномерно распределенный заряд  $q = 0,1$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его конца.

22. Тонкий стержень длиной  $l = 20$  см равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 0,1$  мкКл/м. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в диэлектрической среде с  $\epsilon = 1,9$  в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его центр, на расстоянии  $a = 20$  см от центра стержня.

23. Тонкое кольцо несет распределенный заряд  $q = 0,2$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние  $r = 20$  см. Радиус кольца  $R = 10$  см.

24. Бесконечный тонкий стержень, ограниченный с одной стороны, несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью  $\tau = 0,5$  мкКл/м. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на оси стержня на расстоянии  $a = 20$  см от его начала.

25. По тонкому кольцу радиусом  $R = 20$  см равномерно распределен с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определите

максимальное значение напряженности  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2$ , на оси кольца.

26. Прямая тонкая проволока длиной  $l = 1$  м несет равномерно распределенный заряд. Вычислите линейную плотность  $\tau$  заряда, если напряженность поля  $E$  в вакууме в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через его середину, на расстоянии  $a = 0,5$  м от ее середины равна  $E = 200$  В/м.

27. Расстояние между двумя тонкими бесконечными стержнями, расположенными параллельно друг другу,  $d = 16$  см. Стержни равномерно заряжены с линейной плотностью  $\tau = 15$  нКл/м и находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 2,2$ . Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенными зарядами в точке  $A$ , удаленной на расстояние  $r = 10$  см от обоих стержней.

28. Тонкий стержень длиной  $l = 10$  см равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 0,4$  мкКл. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , лежащей на прямой, перпендикулярной к оси стержня и проходящей через один из его концов, на расстоянии  $a = 8$  см от этого конца.

29. По тонкому полукольцу радиуса  $R = 10$  см равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau = 1$  мкКл/м. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $A$ , совпадающей с центром кольца.

30. Две трети тонкого кольца радиусом  $R = 10$  см несут равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau = 0,2$  мкКл/м заряд. Определите напряженность  $E$  электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в вакууме в точке  $O$ , совпадающей с центром кольца.

#### Тема 4. Теорема Гаусса

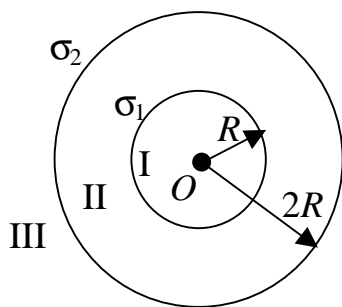


Рис. 31

31. На двух концентрических сферах радиусом  $R$  и  $2R$ , находящихся в вакууме, равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . (рис. 31). Используя теорему Гаусса, найдите

зависимость напряженности электрического поля  $E(r)$  от расстояния для областей I, II, III. Постройте график  $E(r)$ .

32. Смотрите условие задачи 31. Принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ .

33. Смотрите условие задачи 31.

Принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ .

34. Смотрите условие задачи 31.

Принять  $\sigma_1 = -2\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ .

35. На двух бесконечных параллельных

плоскостях, находящихся в вакууме, равномерно распределены заряды с

поверхностными плотностями  $\sigma_1 = 2\sigma$  и  $\sigma_2 = \sigma$  (рис. 32). Используя теорему Гаусса и принцип

суперпозиции электрических полей, найдите выражение  $E(x)$  напряженности электрического поля для областей I, II, III. Постройте график  $E(x)$ .

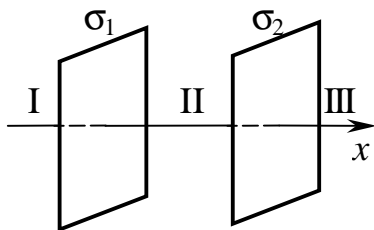


Рис. 32

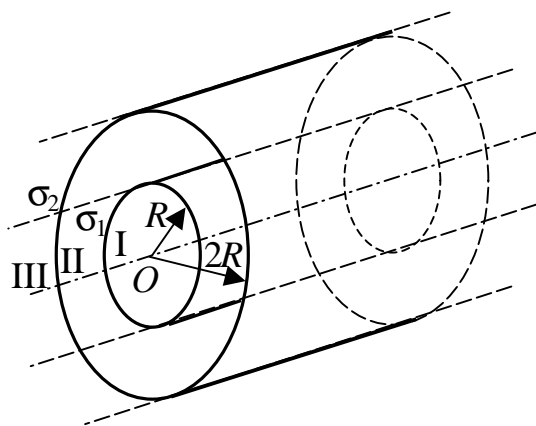


Рис. 33

36. Смотрите условие зада-

чи 35. Принять  $\sigma_1 = -4\sigma$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma$ .

37. Смотрите условие зада-

чи 35. Принять  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ .

38. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах

радиусами  $R$  и  $2R$ , находящихся в вакууме, равномерно

распределены заряды с поверхностными плотностями

$\sigma_1 = -2\sigma$ , и  $\sigma_2 = \sigma$  (рис. 33).

Используя теорему Гаусса, найдите

зависимость  $E(r)$  напряженности электрического поля от расстояния для областей I, II, III и постройте график  $E(r)$ .

39. Смотрите условие задачи 38. Принять  $\sigma_1 = -\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ .

40. Смотрите условие задачи 38. Принять  $\sigma_1 = -\sigma$ ,  $\sigma_2 = 2\sigma$ .

### Тема 5. Потенциал и разность потенциалов.

#### Работа сил электростатического поля

41. Два точечных заряда  $q_1 = 6$  мкКл и  $q_2 = 3$  мкКл находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 3,3$  на расстоянии  $d = 60$  см друг от друга.

Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

42. Тонкий диск радиуса  $r$  равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найдите потенциал электрического поля в вакууме в точке, лежащей на оси диска на расстоянии  $a$  от него.

43. Какую работу надо совершить, чтобы перенести заряд  $q = 6$  нКл из точки, находящейся на расстоянии  $a_1 = 0,5$  м от поверхности шара, в точку, находящуюся на расстоянии  $a_2 = 0,1$  м от его поверхности? Радиус шара  $R = 5$  см, потенциал шара  $\phi = 200$  В.

44. Восемь одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала  $\phi_1 = 10$  В, сливаются в одну. Каков потенциал  $\phi$  образовавшейся капли?

45. Тонкий стержень длиной  $l = 50$  см согнут в кольцо. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда  $\tau = 800$  нКл/м и находится в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,4$ . Определите потенциал  $\phi$  в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии  $d = 10$  см от его центра.

46. Поле в вакууме образовано точечным диполем с электрическим моментом  $p = 200$  пКл·м. Определите разность потенциалов  $U$  двух точек поля, расположенных симметрично относительно диполя на его оси на расстоянии  $r = 40$  см от центра диполя.

47. Электрическое поле образовано в вакууме бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой  $\tau = 20$  пКл/м. Определите разность потенциалов двух точек поля, отстоящих от нити на расстоянии  $r_1 = 8$  см и  $r_2 = 12$  см.

48. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых  $\sigma_1 = 2$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = -0,8$  мкКл/м<sup>2</sup>, находятся в диэлектрической среде с  $\epsilon = 3$  на расстоянии  $d = 0,6$  см друг от друга. Определите разность потенциалов  $U$  между плоскостями.

49. Тонкая квадратная рамка расположена в вакууме и равномерно заряжена с линейной плотностью заряда  $\tau = 200$  пКл/м. Определите потенциал  $\phi$  поля в точке пересечения диагоналей.

50. Два электрических заряда  $q_1 = q$  и  $q_2 = -2q$  расположены на расстоянии  $l = 6a$  друг от друга. Найдите геометрическое место точек на плоскости, в которой лежат эти заряды, где потенциал создаваемого ими электрического поля равен нулю.

## ***Тема 6. Движение заряженных тел в электростатическом поле***

51. На сколько изменится кинетическая энергия заряженного шарика массой  $m = 1$  г и зарядом  $q_1 = 1$  нКл при его движении в вакууме под действием поля точечного заряда  $q_2 = 1$  мкКл из точки, удаленной на  $r_1 = 3$  см от этого заряда в точку, отстоящую на  $r_2 = 10$  см от него? Чему равна конечная скорость шарика, если начальная скорость равна  $v_0 = 0,5$  м/с?

52. Электрон со скоростью  $v_0 = 1,6 \cdot 10^6$  м/с влетел в перпендикулярное скорости электрическое поле с напряженностью  $E = 90$  В/см. Какое расстояние от точки влета пролетит электрон, когда его скорость составит угол  $\alpha = 45^\circ$  с начальным направлением?

53. Электрон с энергией  $K = 400$  эВ (в бесконечности) движется в вакууме вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом  $R = 10$  см. Определите минимальное расстояние  $a$ , на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если ее заряд  $q = -10$  нКл.

54. Электрон, пройдя в плоском воздушном конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость  $v = 10^5$  м/с. Расстояние между пластинами  $d = 8$  мм. Найдите: 1) разность потенциалов  $U$  между пластинами; 2) поверхностную плотность заряда  $\sigma$  на пластинах.

55. Бесконечная плоскость находится в вакууме и заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = -35,4$  нКл/м<sup>2</sup>. По направлению силовых линий электрического поля, созданного плоскостью, движется электрон. Определите минимальное расстояние  $l_{\min}$ , на которое может подойти к этой плоскости электрон, если на расстоянии  $l_0 = 10$  см от плоскости он имел кинетическую энергию  $K = 80$  эВ.

56. Какой минимальной скоростью  $v_{\min}$  должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного металлического шара радиусом  $R = 10$  см, двигаясь из точки, находящейся на расстоянии  $a = 30$  см от центра шара? Потенциал шара  $\phi = 400$  В.

57. В однородное электрическое поле напряженностью  $E = 200$  В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью  $v_0 = 2$  Мм/с. Определите расстояние  $l$ , которое пройдет электрон до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной.

58. Протон со скоростью  $v_0 = 6 \cdot 10^5$  м/с влетел в перпендикулярное скорости  $v_0$  однородное электрическое поле с напряженностью

$E = 100$  В/м. На какое расстояние от начального направления движения сместится электрон, когда его скорость  $\vec{v}$  составит угол  $\alpha = 60^\circ$  с этим направлением? Чему равна разность потенциалов между точкой входа в поле и этой точкой?

59. Электрон влетает в однородное электрическое поле в направлении, противоположном направлению силовых линий. В некоторой точке поля с потенциалом  $\varphi_1 = 100$  В электрон имел скорость  $v_0 = 2$  Мм/с. Определите потенциал  $\varphi_2$  точки поля, в которой скорость электрона будет в три раза больше начальной. Какой путь пройдет электрон, если напряженность электрического поля  $E = 5 \cdot 10^4$  В/м?

60. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор длиной  $l = 5$  см со скоростью  $v_0 = 4 \cdot 10^7$  м/с, направленной параллельно пластинам. Конденсатор заряжен до напряжения  $U = 400$  В. Расстояние между пластинами  $d = 1$  см. Найдите смещение электрона, вызванное полем конденсатора, направление и величину его скорости в момент вылета?

### **Тема 7. Емкость. Конденсаторы. Энергия электрического поля**

61. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 10$  мкФ и  $C_2 = 8$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 60$  В и  $U_2 = 100$  В соответственно. Определите напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими одноименные заряды.

62. Два плоских конденсатора емкостями  $C_1 = 1$  мкФ и  $C_2 = 8$  мкФ соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов  $U = 50$  В. Найдите разность потенциалов между пластинами конденсаторов, если после отключения от источника напряжения расстояние между пластинами первого конденсатора уменьшили в 2 раза.

63. Плоский воздушный конденсатор зарядили до напряжения  $U = 180$  В и отключили от источника напряжения. Каким станет напряжение между обкладками, если расстояние между ними увеличить от  $d_1 = 5$  мм до  $d_2 = 12$  мм? Найдите работу  $A$  по раздвижению пластин и плотность  $w_e$  энергии электрического поля до и после раздвижения пластин. Площадь пластин  $S = 175$  см<sup>2</sup>.

64. Два конденсатора емкостями  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 5$  мкФ заряжены до напряжений  $U_1 = 100$  В и  $U_2 = 150$  В соответственно.

Определите напряжение  $U$  на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими разноименные заряды.

65. Металлический шар радиусом  $R_1 = 10$  см заряжен до потенциала  $\varphi_1 = 150$  В, его окружает концентрическая проводящая незаряженная оболочка радиусом  $R_2 = 15$  см. Чему станет равен потенциал шара  $\varphi$ , если заземлить оболочку? Соединить шар с оболочкой проводником?

66. Емкость плоского конденсатора  $C = 600$  пФ. Диэлектрик – стекло с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ . Конденсатор зарядили до  $U = 300$  В и отключили от источника напряжения. Какую работу надо выполнить, чтобы пластину диэлектрика вынуть из конденсатора?

67. Конденсаторы емкостью  $C_1 = 4$  мкФ, заряженный до  $U_1 = 600$  В, и емкостью  $C_2 = 2$  мкФ, заряженный до  $U_2 = 200$  В, соединили одноименно заряженными обкладками. Найдите энергию  $\Delta W$  проскочившей искры.

68. Два металлических шарика радиусами  $R_1 = 5$  см и  $R_2 = 10$  см имеют заряды  $q_1 = 40$  нКл и  $q_2 = -20$  нКл соответственно. Найдите энергию  $\Delta W$ , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

69. Заряженный шар радиусом  $R_1 = 3$  см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром радиусом  $R_2 = 5$  см. После того как шарики разъединили, энергия второго шарика оказалась равной  $W_2 = 0,4$  Дж. Какой заряд  $q_1$  был на первом шарике до соприкосновения?

70. Конденсаторы с емкостями  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ и  $C_3 = 3$  мкФ подключены к источнику напряжения  $U = 220$  В. Определите энергию  $W$  каждого конденсатора в случае их последовательного и параллельного включения.

## ***Тема 8. Постоянный электрический ток. Законы Ома.***

### ***Работа и мощность тока***

71. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора сопротивлением  $R = 10$  Ом, включают вольтметр сначала последовательно, затем параллельно сопротивлению  $R$ . Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Сопротивление вольтметра  $R_V = 10^3$  Ом. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора  $r$ .

72. ЭДС источника  $\mathcal{E} = 100$  В, внутреннее сопротивление  $r =$



$= 5 \text{ Ом}$ . К источнику подключили резистор сопротивлением  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ . Параллельно ему подсоединили конденсатор с последовательно соединенным с ним другим резистором сопротивлением  $R_2 = 200 \text{ Ом}$ . Заряд на конденсаторе оказался  $q = 10^{-6} \text{ Кл}$ . Определите емкость конденсатора  $C$ .

73. От батареи, ЭДС которой  $\mathcal{E} = 600 \text{ В}$ , требуется передать энергию на расстояние  $l = 1 \text{ км}$ . Потребляемая мощность  $P = 5 \text{ кВт}$ . Найдите минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводящих проводов  $d = 0,5 \text{ см}$ .

74. При силе тока  $I_1 = 3 \text{ А}$  во внешней цепи батареи выделяется мощность  $P_1 = 18 \text{ Вт}$ , при токе  $I_2 = 1 \text{ А}$  –  $P_2 = 10 \text{ Вт}$ . Определите силу тока  $I_{к.з}$  короткого замыкания источника ЭДС.

75. ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ . Наибольшая сила тока, которую может дать батарея  $I_{\max} = 10 \text{ А}$ . Определите максимальную мощность  $P_{\max}$ , которая может выделяться во внешней цепи.

76. В конце зарядки аккумулятора вольтметр, который подключен к его полюсам, показывает напряжение  $U_1 = 12 \text{ В}$ . Сила тока зарядки  $I_1 = 4 \text{ А}$ . В начале разрядки аккумулятора при силе тока  $I_2 = 5 \text{ А}$  вольтметр показывает напряжение  $U_2 = 11,8 \text{ В}$ . Определите электродвижущую силу  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  аккумулятора.

77. От генератора, ЭДС которого  $\mathcal{E} = 220 \text{ В}$ , требуется передать энергию на расстояние  $l = 2,5 \text{ км}$ . Мощность потребителя  $P = 10 \text{ кВт}$ . Найдите минимальное сечение проводящих медных проводов  $d_{\min}$ , если потери мощности в сети не должны превышать 5% мощности потребителя.

78. Электродвигатель питается от сети с напряжением  $U = 220 \text{ В}$ . Чему равна мощность двигателя и его КПД при протекании по его обмотке тока  $I_1 = 2 \text{ А}$ , если при полном торможении якоря по цепи идет ток  $I_2 = 5 \text{ А}$ ?

79. В сеть с напряжением  $U = 100 \text{ В}$  подключили катушку с сопротивлением  $R_1 = 2 \text{ кОм}$  и вольтметр, соединенные последовательно. Показание вольтметра  $U_1 = 80 \text{ В}$ . Когда катушку заменили другой, вольтметр показал  $U_2 = 60 \text{ В}$ . Определите сопротивление  $R_2$  другой катушки.

80. Батарея с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнута на внешнее сопротивление  $R$ . Наибольшая мощность, выделяющаяся

во внешней цепи, равна  $P_{\max} = 9$  Вт. При этом течет ток  $I = 3$  А. Найдите ЭДС батареи  $\mathcal{E}$  и ее внутреннее сопротивление  $r$ .

### Тема 9. Правила Кирхгофа

81. Два источника тока ( $\mathcal{E}_1 = 8$  В,  $r_1 = 2$  Ом;  $\mathcal{E}_2 = 6$  В,  $r_2 = 1,6$  Ом) и реостат ( $R = 10$  Ом) соединены, как показано на рис. 34. Вычислите силу тока, текущего через реостат.

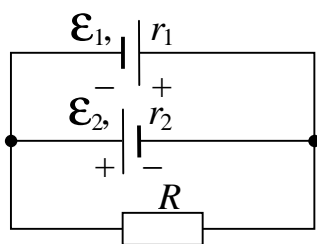


Рис. 34

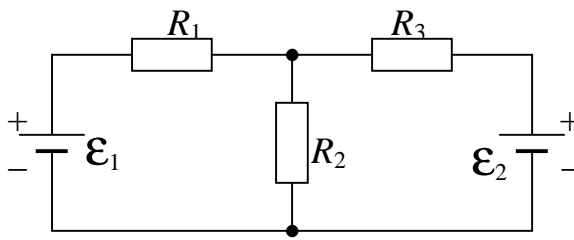


Рис. 35

82. Определите силу тока в сопротивлении  $R_3$  (рис. 35) и напряжение на концах этого сопротивления, если  $\mathcal{E}_1 = 4$  В,  $\mathcal{E}_2 = 3$  В,  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом,  $R_3 = 1$  Ом. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

83. Три батареи с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 12$  В,  $\mathcal{E}_2 = 5$  В и  $\mathcal{E}_3 = 8$  В и одинаковыми внутренними сопротивлениями, равными  $r_1 = r_2 = r_3 = 1$  Ом, соединены между собой одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов ничтожно мало. Каковы силы токов, текущих через батареи?

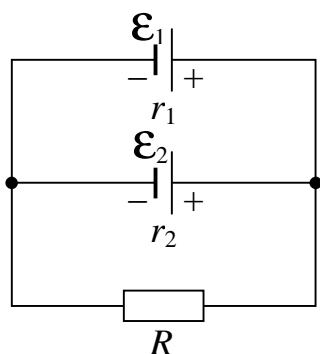


Рис. 36

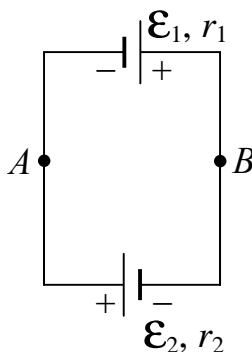


Рис. 37

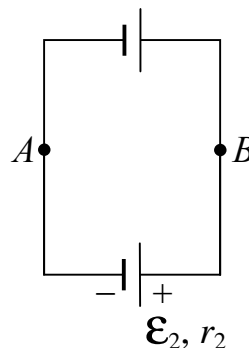


Рис. 38

84. Две батареи ( $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ В}$ ,  $r_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 6 \text{ В}$ ,  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ ) и реостат ( $R = 20 \text{ Ом}$ ) соединены, как показано на рис. 36. Найдите силу тока в батареях и реостате.

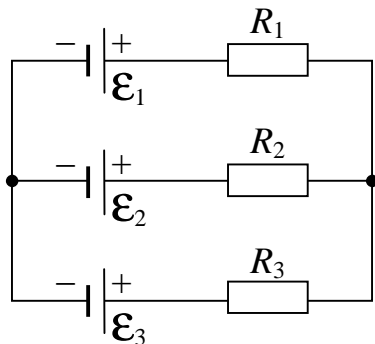


Рис. 39

85. Два источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 1,2 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$  и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 0,6 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,5 \text{ Ом}$  соответственно соединены, как показано на рис. 37. Какова сила тока в цепи и разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  в этом случае?

86. Два источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 1,8 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$  и внутренними сопротивлениями  $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 0,3 \text{ Ом}$  соответственно соединены, как показано на рис. 38. Какова сила тока в цепи и разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  в этом случае?

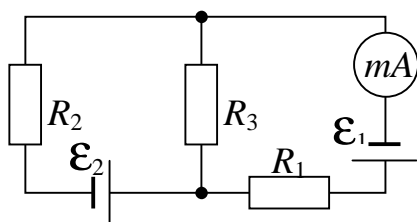


Рис. 40

87. Три источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 11 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4 \text{ В}$  и  $\mathcal{E}_3 = 6 \text{ В}$  и три реостата с сопротивлениями  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$  соединены, как показано на рис. 39. Определите силу тока в реостатах. Внутреннее сопротивление источников пренебрежимо мало.

88. Какую силу тока показывает миллиамперметр в схеме на рис. 40, если  $\mathcal{E}_1 = 2 \text{ В}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 1 \text{ В}$ ,  $R_1 = 10^3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 500 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 200 \text{ Ом}$  и сопротивление миллиамперметра  $R_A = 200 \text{ Ом}$ . Внутреннее сопротивление элементов не учитывать.

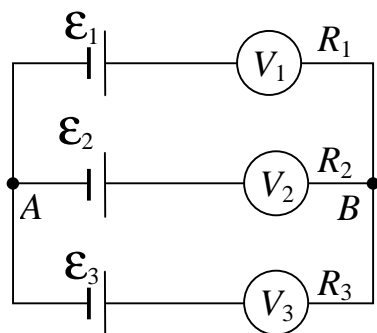


Рис. 41

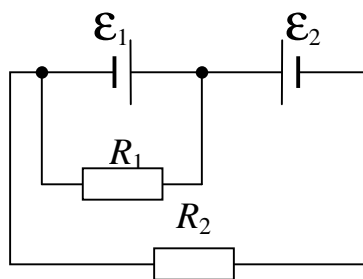


Рис. 42

89. Гальванические элементы и три вольтметра соединены по схеме, показанной на рис. 41. Электродвижущие силы гальванических элементов равны  $\mathcal{E}_1 = 1$  В,  $\mathcal{E}_2 = 2$  В и  $\mathcal{E}_3 = 1,5$  В. Сопротивления вольтметров соответственно равны  $R_1 = 2000$  Ом,  $R_2 = 3000$  Ом,  $R_3 = 4000$  Ом. Сопротивления элементов не учитывать. Найдите разность потенциалов между узлами  $A$  и  $B$  схемы.

90. Два одинаковых элемента имеют ЭДС  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$  В и внутренние сопротивления  $r_1 = r_2 = 0,5$  Ом (рис. 42). Найдите токи  $I_1$  и  $I_2$ , текущие через сопротивление  $R_1 = 0,5$  Ом и  $R_2 = 1,5$  Ом, а также ток  $I$  через элемент с ЭДС  $\mathcal{E}_1$ .

### ***Тема 10. Связь между электрическими и тепловыми характеристиками для цепи с изменяющимся током***

91. За время  $t = 20$  с при равномерном возрастании силы тока от нуля до некоторого значения в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 4$  кДж. Определите скорость нарастания силы тока.

92. При выключении источника тока сила тока в цепи убывает по закону  $I = 10 e^{-500t}$  (А). Определите количество теплоты  $Q$ , которое выделится в резисторе сопротивлением  $R = 5$  Ом после выключения источника тока.

93. Сила тока в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за время  $t = 50$  с равномерно нарастает от  $I_1 = 5$  А до  $I_2 = 10$  А. Определите количество теплоты  $Q$ , выделившееся за это время в проводнике.

94. В проводнике за время  $t = 10$  с при равномерном возрастании силы тока от  $I_1 = 1$  А до  $I_2 = 2$  А выделилось количество теплоты  $Q = 5$  кДж. Найдите сопротивление  $R$  проводника.

95. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону  $I = 10 \sin(50\pi t)$  (А). Найдите заряд  $q$ , проходящий через поперечное сечение проводника за время  $t$ , равное половине периода  $T$ .

96. При равномерном возрастании силы тока от нуля до некоторого значения  $I$  в проводнике сопротивлением  $R = 25$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 40$  кДж. Определите значение силы тока  $I$ , если время нарастания тока  $t = 10$  с.

97. За время  $t = 8$  с при равномерном возрастании силы тока в

проводнике сопротивлением  $R = 8$  Ом выделилось количество теплоты  $Q = 500$  Дж. Определите заряд  $q$ , прошедший через поперечное сечение проводника, если сила тока в начальный момент времени равна нулю.

98. Определите количество теплоты  $Q$ , выделившееся за время  $t = 10$  с в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом, если сила тока в нем за это время равномерно уменьшилась от  $I_1 = 10$  А до  $I_2 = 0$ .

99. Сила тока в цепи изменяется по закону  $I = 5 \sin(0,2\pi t)$  (А). Определите количество теплоты  $Q$ , которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 10$  Ом за период времени от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = T/4$ .

100. Сила тока в цепи изменяется со временем по закону  $I = 3e^{-0,02t}$  (А). Определите количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением  $R = 20$  Ом за время, в течение которого ток уменьшится в  $e$  раз.



# МАГНЕТИЗМ

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4\*

### 4.1. Содержание учебной программы по разделу «Электромагнетизм» (для инженерно-технических специальностей)

**1. Магнитное поле в вакууме.** Взаимодействие токов. Магнитное поле. Вектор магнитной индукции. Поле движущегося заряда. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции. Примеры расчета магнитных полей. Циркуляция вектора магнитной индукции. Магнитное поле тороида и длинного соленоида. Магнитный поток. Теорема Гаусса.

**2. Действие магнитного поля на проводники с током и движущиеся заряды.** Сила Ампера. Контур с током в магнитном поле. Магнитный момент. Момент сил, действующих на контур в однородном поле. Работа перемещения проводника и контура в магнитном поле. Взаимодействие контура с неоднородным полем. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в магнитном и электрическом полях. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц, масс-спектрометров. Эффект Холла. МГД-генератор. ЭДС при движении проводников в магнитном поле.

**3. Магнитное поле в веществе.** Магнитные моменты атомов. Орбитальный и спиновой моменты. Магнитомеханические явления. Намагниченность. Микро- и макротоки. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды. Элементарная теория диа- и парамагнетизма. Ферромагнетики. Опыты Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис. Точка Кюри. Спиновая природа ферромагнетизма. Домены. Условия на границе раздела двух сред. Магнитные цепи.

**4. Явление электромагнитной индукции. Энергия магнитного поля.** Опыты Фарадея. Закон электромагнитной индукции. Вихревое электрическое поле. Токи Фуко. Явление самоиндукции. Индуктивность. Скин-эффект. Переходные процессы в электрической цепи при подключении и отключении источника. Явление взаимной индукции.

---

\* Материал этой работы подготовлен Бобровицем О. Г.

Энергия контура с током. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.

**5. Электромагнитные колебания.** Квазистационарные токи. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления. Свободные затухающие колебания. Логарифмический декремент затухания. Добротность. Вынужденные электрические колебания. Векторная диаграмма. Резонанс напряжений. Мощность в цепи переменного тока.

**6. Электромагнитное поле.** Ток смещения, уравнения Максвелла. Относительный характер электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна. Основные свойства электромагнитных волн. Опыты Герца, Лебедева, Попова. Энергия электромагнитных волн. Поток энергии. Вектор Умова – Пойнтинга. Излучение диполя. Эффект Доплера. Шкала электромагнитных волн.

#### **4.2. Содержание учебной программы по разделу «Магнетизм» (для химико-технологических специальностей)**

**1. Магнитное поле в вакууме.** Магнитное взаимодействие токов. Магнитостатическое поле. Индукция магнитного поля. Линии индукции (силовые линии). Сила Ампера. Закон Био – Савара – Лапласа. Принцип суперпозиции магнитных полей. Магнитное поле прямолинейного проводника. Сила взаимодействия прямолинейных проводников с током. Определение единицы силы тока (ампера) в СИ. Магнитное поле кругового проводника с током (магнитного диполя). Магнитный момент диполя. Магнитное поле движущегося заряда. Магнитные поля как релятивистский эффект. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля. Циркуляция вектора индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока. Магнитные поля соленоида и тороида. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Эффект Холла. Ускорители заряженных частиц. Магнетрон. Масс-спектрометрия. Магнитный диполь в магнитном поле. Момент сил, действующих на контур. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.

**2. Магнитное поле в веществе.** Магнитные моменты электронов и атомов. Действие магнитного поля на электронные



орбиты атомов и молекул. Прецессия Лармора. Молекулярные и поверхностные токи магнетика. Явление намагничивания. Вектор намагниченности. Магнитная восприимчивость. Индукция и напряженность магнитного поля внутри магнетика. Закон полного тока для поля в веществе. Магнитная проницаемость среды. Условия для характеристик поля на границе двух магнетиков. Типы магнетиков. Диамагнетики. Парамагнетики. Соотношение между проявлениями диа- и парамагнитных свойств вещества. Ферромагнетики. Температура Кюри. Квантовая природа ферромагнетизма. Механизм намагничивания ферромагнетика. Магнитный гистерезис. Применение ферромагнетиков. Магнитные цепи. Гиромагнитный и магнитострикционные эффекты.

**3. Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля.** Явление электромагнитной индукции. Электродвижущая сила индукции. Правило Ленца. Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея – Ленца). Явление самоиндукции. Индуктивность. Токи при включении источника тока и его отключении. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность. Энергия соленоида с током. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии.

**4. Электромагнитные колебания. Переменный электрический ток.** Электрический колебательный контур. Собственные электромагнитные колебания. Электромагнитные колебания в идеальном колебательном контуре. Переменные электрическое и магнитное поля в элементах Контура. Взаимные превращения электрической и магнитной энергии в контуре. Затухающие электромагнитные колебания. Логарифмический декремент затухания. Добротность контура. Аперiodический процесс разрядки конденсатора в контуре. Вынужденные электромагнитные колебания в колебательных контурах. Сдвиг фаз между током и напряжением. Резонанс напряжений. Закон Ома для цепи переменного тока. Характеристики переменного тока. Мощность тока. Токи Фуко. Скин-эффект. Принцип работы электроизмерительных приборов.

**6. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля.** Открытый колебательный контур. Вибратор Герца. Излучение электромагнитных волн. Излучение Черенкова. Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной формах. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны

(волновое уравнение). Уравнения плоской и сферической электромагнитных волн. Основные свойства электромагнитных волн. Фазовая скорость. Энергия электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга. Шкала электромагнитных волн. Радиочастотный и оптический диапазоны электромагнитных волн.

#### 4.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения

1. Закон Био – Савара – Лапласа для проводника с током  $I$ , элемент  $dl$  которого создает в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  индукцию  $d\vec{B}$  магнитного поля, имеет следующий вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (4.1)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (для вакуума  $\mu = 1$ );  $I d\vec{l}$  – элемент тока;  $d\vec{l}$  – вектор, по модулю равный длине  $dl$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от элемента  $dl$  проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция;  $r$  – модуль радиуса-вектора  $\vec{r}$ .

Векторы  $d\vec{l}$ ,  $\vec{r}$  и  $d\vec{B}$  в соответствии с *правилом правой руки* образуют правую тройку векторов.

Из выражения (4.1) следует, что модуль вектора  $d\vec{B}$  определяется по формуле

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl \sin(\hat{dl}, \vec{r})}{r^2}, \quad (4.2)$$

где  $(\hat{dl}, \vec{r}) = \alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Магнитная индукция  $\vec{B}$  связана с напряженностью  $\vec{H}$  магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (4.3)$$

2. Магнитная индукция  $B$  в центре *кругового* проводника радиуса  $R$  с током  $I$  вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R}. \quad (4.4)$$

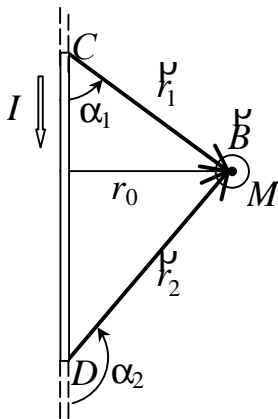


Рис. 43

3. Магнитная индукция  $B$  поля, создаваемого отрезком  $CD$  прямолинейного проводника с током  $I$  в точке  $M$  (см. рис. 43), рассчитывается по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4.5)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между направлением тока в проводнике и радиусами-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  соответственно, проведенными из концов проводника в точку  $M$ ;  $r_0$  – расстояние от точки  $M$  до проводника.

Магнитная индукция  $B$  поля, создаваемого бесконечно длинным проводником с током  $I$  в точке  $M$

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0}, \quad (4.6)$$

где  $r_0$  – расстояние от точки  $M$  до оси проводника.

4. Магнитная индукция  $B$  поля, создаваемого внутри длинного соленоида или тороида с током  $I$ , вычисляется по формуле

$$B = \mu_0 \mu In, \quad (4.7)$$

где  $n = N/l$  – отношение количества витков  $N$  в соленоиде к его длине  $l$ , т. е. количество витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

*Принцип суперпозиции*

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (4.8)$$

где  $\vec{B}_i$  – вектор индукции поля, создаваемого  $i$ -м источником (например, проводником с током).

Если источники поля (элементы тока  $I d\vec{l}$ ) распределены непрерывно, то векторную сумму (4.8) можно заменить интегралом:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}, \quad (4.9)$$

где индукция  $d\vec{B}$  определяется по закону Био – Савара – Лапласа (4.1).

5. Формула для силы Ампера  $d\vec{F}_A$ , которая действует на элемент тока  $I d\vec{l}$  в магнитном поле индукцией  $\vec{B}$ , имеет следующий вид:

$$d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow |d\vec{F}_A| = IB dl \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{dl}, \vec{B}), \quad (4.10)$$

где  $dl$  – длина элемента проводника, по которому проходит ток силой  $I$  и который находится в магнитном поле индукцией  $\vec{B}$ , угол  $\alpha$  образован векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Направление вектора силы  $d\vec{F}_A$  определяется *правилом векторного произведения*, или *правилом левой руки*.

Если прямолинейный проводник длиной  $l$  с током  $I$  находится в *однородном* магнитном поле, то модуль  $F_A$  силы Ампера определяется по формуле

$$F_A = BIl \sin \alpha, \quad (4.11)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением тока  $I$  и вектором индукции  $\vec{B}$ .

6. *Магнитный момент*  $\vec{p}_m$  плоского контура (рамки) с током  $I$  определяется по формуле

$$\vec{p}_m = ISN \vec{n}. \quad (4.12)$$

где  $S$  – площадь контура;  $N$  – количество витков в контуре, в которых ток течет в одинаковом направлении;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости контура, направление которого определяется по *правилу правого винта* (буравчика): при вращении винта в направлении тока он вворачивается в направлении вектора  $\vec{n}$ .

7. *Механический момент*  $\vec{M}$  сил, действующий на контур с током, который находится в однородном магнитном поле

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{M}| = p_m B \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{p}_m, \vec{B}). \quad (4.13)$$

8. *Сила Лоренца*  $\vec{F}_L$ , которая действует на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле индукцией  $\vec{B}$ , выражается формулой

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{F}_L| = qvB \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{v}, \vec{B}). \quad (4.14)$$

Направление, в котором действует сила Лоренца, находится с помощью *правила векторного произведения*, или *правила левой руки*.

9. Магнитный поток  $\Phi_m$  через поверхность площадью  $S$

$$\Phi_m = \int_S B_n dS, \quad B_n = B \cos(\vec{n}, \vec{B}), \quad (4.15)$$

где  $B_n$  – проекция вектора  $\vec{B}$  индукции магнитного поля на нормаль  $\vec{n}$  к элементарной площади  $dS$ , а интеграл берется по всей площади  $S$ .

Если контур, который стягивает плоскую поверхность площадью  $S$ , находится в однородном магнитном поле, то

$$\Phi_m = BS \cos \varphi, \quad \varphi = (\vec{n}, \vec{B}). \quad (4.16)$$

#### 10. Потокосцепление

$$\Psi_m = N\Phi_m, \quad (4.17)$$

где  $N$  – количество витков соленоида (тороида);  $\Phi_m$  – магнитный поток через площадь поперечного сечения соленоида (тороида).

Работа  $A$  магнитного поля, затрачиваемая на перемещение замкнутого контура с постоянным током в магнитном поле

$$A_{1-2} = I\Delta\Phi_m = I(\Phi_{m_2} - \Phi_{m_1}), \quad (4.18)$$

где  $I$  – сила тока в контуре;  $\Delta\Phi_m$  – изменение магнитного потока через поверхность контура.

Если на контур с током  $I$  в однородном магнитном поле действует механический момент  $M$  (формула (4.13)), то работа при повороте контура от угла  $\varphi_1$  до угла  $\varphi_2$  определяется по формуле

$$A_{1-2} = \pm \int_1^2 M d\varphi, \quad (4.19)$$

где  $d\varphi$  – элементарный угол поворота контура.

11. *Магнитная проницаемость*  $\mu$  ферромагнетика связана с магнитной индукцией  $B$  поля в нем и напряженностью  $H$  намагничивающего поля соотношением

$$\mu = B/(\mu_0 H). \quad (4.20)$$

#### 12. ЭДС индукции, возникающая в проводящем контуре

$$\mathcal{E}_{\text{ин}} = -\frac{d\Psi_m}{dt} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} \text{ – закон Фарадея – Ленца.} \quad (4.21)$$

13. Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  на концах проводника длиной  $l$ , который движется со скоростью  $v$  в однородном магнитном поле, находится по формуле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Blv \sin \alpha, \quad \alpha = (\vec{v}, \vec{B}), \quad (4.22)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями векторов скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ .

14. Сила *индукционного* тока, возникающая в замкнутом проводящем контуре сопротивлением  $R$ , который пронизывает магнитное поле

$$I_{\text{ин}} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi_m}{dt}. \quad (4.23)$$

15. Величина электрического заряда  $q$ , который индуцируется в контуре сопротивлением  $R$  и с числом витков  $N$ , при изменении магнитного потока от  $\Phi_{m1}$  до  $\Phi_{m2}$  рассчитывается по формуле

$$q = -\frac{\Delta\Psi_m}{R} = -\frac{N}{R}(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}). \quad (4.24)$$

16. *Эффективные (действующие) значения* силы  $I$  и напряжения  $U$  переменного тока связаны с их амплитудными значениями  $I_{\text{max}}$  и  $U_{\text{max}}$  соотношениями

$$I = I_{\text{max}} / \sqrt{2}, \quad U = U_{\text{max}} / \sqrt{2}. \quad (4.25)$$

17. *Индуктивность замкнутого проводящего контура*

$$L = \Psi_c / I, \quad (4.26)$$

где  $\Psi_c$  – *собственное потокоцепление* контура;  $I$  – сила тока в контуре.

18. *Индуктивность* длинного соленоида и тороида

$$L = \mu\mu_0(N^2/l) S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (4.27)$$

где  $N$  – количество витков соленоида;  $l$  – длина соленоида;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $n = N/l$ ;  $V$  – объем соленоида.

19. Электродвижущая сила *самоиндукции* в проводящем контуре

$$\mathcal{E}_c = -L(dI/dt), \quad \text{или} \quad \langle \mathcal{E}_c \rangle = -L(\Delta I / \Delta t). \quad (4.28)$$

Мгновенное значение силы  $I$  тока в цепи, содержащей последовательно включенные сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ :

а) при включении источника тока

$$I = (\mathcal{E} / R)(1 - e^{-Rt/L}), \quad (4.29)$$

где  $\mathcal{E}$  – ЭДС источника тока;  $t$  – промежуток времени после замыкания цепи;

б) при отключении источника тока

$$I = I_0 e^{-Rt/L}, \quad (4.30)$$

где  $I_0$  – сила тока в цепи в момент отключения источника (при  $t = 0$ );  $t$  – промежуток времени после отключения источника.

20. Энергия  $W_m$ , создаваемого током магнитного поля

$$W_m = LI^2/2. \quad (4.31)$$

21. Объемная плотность  $w_m$  энергии магнитного поля

$$w_m = BH/2 = B^2/(2\mu_0\mu) = \mu_0\mu H^2/2. \quad (4.32)$$

22. При свободных электромагнитных колебаниях в контуре, содержащем последовательно соединенные конденсатор емкостью  $C$ , катушку индуктивностью  $L$  и резистор сопротивлением  $R$ , заряд  $q$  на обкладках конденсатора изменяется со временем по закону

$$q = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \alpha_0) - \text{уравнение затухающих колебаний}, \quad (4.33)$$

где  $A_0$  и  $\alpha_0$  – начальная амплитуда и фаза (определяются из начальных условий);  $\beta$  – коэффициент затухания;  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний;  $\omega^*$  – их циклическая частота;

Значения  $\beta$  и  $\omega^*$  выражаются через параметры контура  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$\beta = R/(2L), \quad (4.34)$$

$$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}, \quad (4.35)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{1/(LC)} - \text{собственная частота незатухающих колебаний}. \quad (4.36)$$

23. Логарифмический декремент затухания

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t + T^*)} = \beta T^*, \quad (4.37)$$

где  $A(t)$  и  $A(t + T^*)$  – значения амплитуды затухающих колебаний в моменты времени  $t$  и  $t + T^*$  ( $T^* = 2\pi/\omega^*$  – период затухающих колебаний).

24. Добротность контура

$$Q = \pi/\delta = \pi/(\beta T^*). \quad (4.38)$$

При малом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) добротность

$$Q \cong \frac{1}{R} \sqrt{L/C}. \quad (4.39)$$

Если  $R = 0$ , то электромагнитные колебания в контуре становятся незатухающими ( $\beta = 0$ ). В этом случае заряд  $q$  на обкладке конденсатора, разность потенциалов  $U_C$  между ними и сила тока  $I$  в контуре изменяются со временем  $t$  по гармоническому закону:

$$\begin{aligned} q &= q_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ U_C &= U_{\max}^C \sin(\omega_c t + \alpha_0); \quad U_{\max}^C = q_{\max} / C, \\ I &= -dq/dt = -I_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha_0); \quad I_{\max} = q_{\max} \omega_0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где  $q_{\max}$ ,  $U_{\max}^C$ ,  $I_{\max}$  – амплитудные значения заряда, разности потенциала на обкладках конденсатора и силы тока в контуре соответственно;  $\alpha_0$  – начальная фаза.

25. Если в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора активным сопротивлением  $R$ , действует *периодическая* ЭДС  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , то в такой цепи возникают *вынужденные колебания* силы тока той же частоты  $\omega$ :

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (4.41)$$

При этом амплитуда силы тока  $I_{\max}$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются следующими формулами:

$$I_{\max} = \mathcal{E}_{\max} / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}; \quad (4.42)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = (\omega L - 1/(\omega C)) / R. \quad (4.43)$$

26. Закон Ома для цепи переменного тока

$$I = U / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}. \quad (4.44)$$

27. Амплитуда силы тока  $I_{\max}$  при вынужденных колебаниях достигает максимального значения (*явление резонанса*), если частота  $\omega$  вынужденных колебаний совпадет с частотой  $\omega_0$  свободных незатухающих колебаний, которая определяется по формуле (4.36). Таким образом, *резонансная частота* для тока

$$\omega_p = \omega_0 = \sqrt{1/LC} \Rightarrow \omega_p L = 1/(\omega_p C). \quad (4.45)$$

В колебательном контуре при резонансе, который возникает при условии  $\omega_p L = 1/(\omega_p C)$ , амплитудное значение силы тока

$$I_{\max}^p = \mathcal{E}_{\max} / R. \quad (4.46)$$



28. При резонансе  $X_L = X_C$  ( $X_L = \omega L$  – индуктивное,  $X_C = 1/(\omega C)$  – емкостное сопротивления) и поэтому амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке индуктивности равны между собой:

$$U_{\max}^{p,C} = U_{\max}^{p,L} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \frac{1}{\omega_p C} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{R} \omega_p L. \quad (4.47)$$

29. Активная мощность  $P$  тока в цепи переменного тока

$$P = \frac{1}{2} I_m \mathcal{E}_m \cos \varphi = I \mathcal{E} \cos \varphi, \quad (4.48)$$

где  $I$  – действующее (эффективное) значение периодического тока;  $\mathcal{E}$  – действующее (эффективное) значение ЭДС;  $\cos \varphi$  – коэффициент мощности ( $\cos \varphi = R/Z$ )

#### 4.4. Примеры решения задач

**Пример 1. Закон Био – Савара – Лапласа.** У тонкого проводящего кольца с током  $I$  магнитный момент  $p_m = 5 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ . Определить магнитную индукцию  $\vec{B}$  в точке  $A$  поля в вакууме, находящейся на оси кольца и удаленной от точек кольца на расстояние  $r = 20 \text{ см}$  (рис. 44).

Дано:

$$p_m = 5 \text{ А} \cdot \text{м}^2;$$

$$r = 0,2 \text{ м}; \mu = 1$$

Найти:  $B$

**Решение.** Для решения задачи кольцо радиусом  $R$  разделим на элементы длиной  $d\vec{l}$  (рис. 44), а затем воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа (4.1) и принципом суперпозиции (4.8) магнитных полей. Закон Био – Савара – Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где  $d\vec{B}$  – магнитная индукция поля, создаваемого элементом  $d\vec{l}$  провода с током  $I$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, направленный от элемента  $d\vec{l}$  проводника к точке  $A$ , в которой определяется магнитная индукция;  $\mu_0$

=

$$= 4\pi \cdot 10^{-7}$$

ная

Гн/м – магнит-  
постоянная.

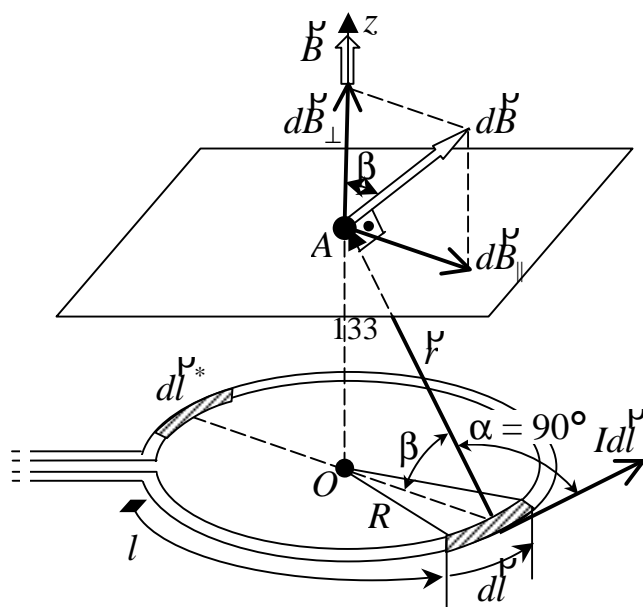


Рис. 44

Направление вектора  $d\vec{B}$  определяется в соответствии с правилом векторного произведения. Принцип суперпозиции (4.8) позволяет для определения  $\vec{B}$  воспользоваться геометрическим суммированием (интегрированием):  $\vec{B} = \int_L d\vec{B}$ , где символ  $L$  означает, что интегрирование выполняется по длине  $L$  провода кольца ( $L = 2\pi R$ ). Разложим вектор  $d\vec{B}$  на перпендикулярную ( $d\vec{B}_\perp$ ) и параллельную ( $d\vec{B}_\parallel$ ) составляющие плоскости кольца, т. е.

$$d\vec{B} = d\vec{B}_\perp + d\vec{B}_\parallel, \vec{B} = \int_L d\vec{B}_\perp + \int_L d\vec{B}_\parallel. \quad (2)$$

Из соображений симметрии следует, что составляющие  $d\vec{B}_\parallel$  полей от каждых двух диаметрально расположенных элементов ( $dl$  и  $dl^*$ ) взаимно уничтожаются, поэтому  $\int_L d\vec{B}_\parallel = 0$ .

Векторы  $d\vec{B}_\perp$  от различных элементов тока  $I d\vec{l}$  направлены вдоль оси  $z$  кольца, поэтому выражение (2) удобно переписать в проекции на эту ось:

$$B = \int_L dB_\perp = \int_L dB \cos \beta, \cos \beta = R/r, \quad (3)$$

где модуль  $dB$  определяется согласно формуле (4.2) при  $\mu = 1$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}, \quad \alpha = (\vec{dl}, \vec{r}) = 90^\circ (\sin \alpha = 1). \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в формулу (3) и выполним интегрирование по  $l$  в пределах от 0 до  $L = 2\pi R$ :

$$B = \int_L dB \cos \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot 2\pi R}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{r^3}. \quad (5)$$

Магнитный момент тонкого проводящего кольца  $p_m = IS$ , где  $S = \pi R^2$  – площадь кольца. Тогда сила тока в кольце

$$I = p_m / S = p_m / (\pi R^2).$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} \frac{p_m}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi r^3}. \quad (6)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей расчетной формулы (6). Для этого подставим в формулу (6) вместо физических величин их единицы в СИ:

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Гн/м} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Вб/А} \cdot 1 \text{ А}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ м}^2} = 1 \text{ Тл}.$$

Подставим в расчетную формулу (6) значения всех величин в единицах СИ и произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,2^3} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 0,125 \text{ мТл}.$$

**Пример 2. Магнитный момент вращающегося заряженного тела.** По тонкому стержню длиной  $l = 40$  см равномерно распределен заряд  $q = 60$  нКл. Стержень вращается с частотой  $n = 12 \text{ с}^{-1}$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии  $a = l/3$  от одного из его концов. Определить магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением заряженного стержня.

*Дано:*

$$l = 0,4 \text{ м}; a = l/3;$$

$$n = 12 \text{ с}^{-1};$$

$$q = 60 \text{ нКл}$$

*Найти:*  $p_m$

*Решение.* Результирующий магнитный момент  $\vec{p}_m$  вращающегося стержня рассчитаем как сумму магнитных моментов участков  $AO$  и  $OB$  (рис. 45):

$$\vec{p}_m = \vec{p}_{m_1} + \vec{p}_{m_2}. \quad (1)$$

Рассмотрим участок  $OB$ . Выделим элементарный участок длиной  $dR$ , отстоящий от оси вращения на расстояние  $R$ . Элементарный заряд  $dq$

этого участка определим с помощью линейной плотности заряда  $\tau = q/l$ ;

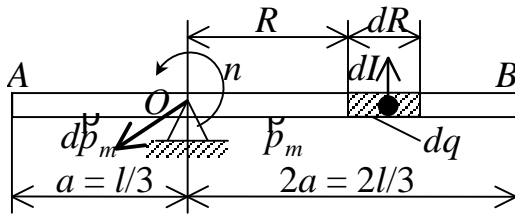


Рис. 45

$$dq = \tau dR = (q/l) dR. \quad (2)$$

Элементарный круговой ток  $dI$ , создаваемый движением заряда  $dq$

$$dI = dq/T = dq n = (q/l) dR n, \quad (3)$$

где  $T = 1/n$  – период вращения стержня.

Согласно правилу буравчика элементарный магнитный момент  $dp_m$  этого тока направлен перпендикулярно плоскости рисунка, а его модуль

$$dp_m = dIS = (q/l) dR n \pi R^2 = \pi (q/l) n R^2 dR. \quad (4)$$

Поэтому магнитный момент  $p_{m_2}$  найдем интегрированием выражения (4):

$$p_{m_2} = \int_0^{2a} dp_m = \int_0^{2a} \pi \frac{q}{l} n R^2 dR = \pi \frac{q}{l} n \int_0^{2a} R^2 dR = \pi \frac{q}{l} n \frac{R^3}{3} \Big|_0^{2a} = \frac{8}{3} \pi \frac{q}{l} n a^3. \quad (5)$$

Проведя аналогичные расчеты для участка  $OA$ , получим

$$p_{m_1} = \int_0^a dp_m = \pi \frac{q}{l} n \frac{R^3}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi}{3} \frac{q}{l} n a^3. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) и (6) в формулу (1), получим ( $a = l/3$ )

$$p_m = \frac{8}{3} \pi \frac{q}{l} n a^3 + \frac{\pi}{3} \frac{q}{l} n a^3 = 3\pi \frac{q}{l} n a^3 = \frac{\pi}{9} q n l^2. \quad (7)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (7):

$$1 \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ с}^{-1} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Подставим числовые значения в формулу (7) и выполним расчеты:

$$p_m = \frac{3,14}{9} \cdot 60 \cdot 10^{-9} \cdot 12 \cdot (0,4)^2 = 4,02 \cdot 10^{-8} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

**Пример 3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях.** Однозарядный ион натрия прошел ускоряющую разность потенциалов  $U = 1$  кВ и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное поле  $B =$

0,5 Тл. Определить относительную атомную массу  $A$  иона, если он описал окружность радиусом  $R = 4,37$  см.

Дано:

$$U = 10^3 \text{ В}; B = 0,5 \text{ Тл}; \\ q_0 = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$\alpha = (\hat{dl}, \hat{B}) = 90^\circ$$

$$R = 4,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Найти:  $A$

Решение. На движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле  $\vec{B}$  ион с зарядом  $q_0$  действует сила Лоренца (4.14):

$$\vec{F}_L = q_0 \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_L = q_0 v B \sin \alpha. \quad (1)$$

Эта сила сообщает иону массой  $m$  центростремительное (нормальное) ускорение ( $a_n$ ) =

$= v^2/R$ ). Поэтому согласно второму закону Ньютона при  $\alpha = 90^\circ$  ( $\sin 90^\circ = 1$ ) получим

$$m(v^2/R) = q_0 v B, \text{ или } mv = q_0 BR. \quad (2)$$

Прежде чем попасть в магнитное поле, ион ускоряется из состояния покоя в электрическом поле. Работа сил этого поля ( $A = q_0 U$ ) равна приобретенной ионом кинетической энергии, т. е.

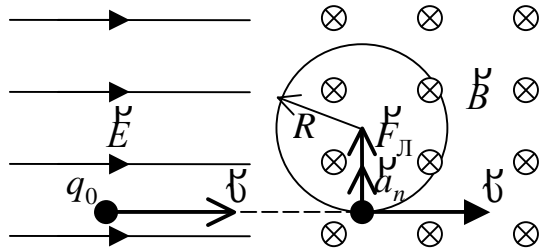


Рис. 46

$$mv^2/2 = q_0 U \Rightarrow mv = \sqrt{2mq_0 U}. \quad (3)$$

Теперь, приравнявая правые части выражений (1) и (2), получим

$$q_0 BR = \sqrt{2mq_0 U} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\Rightarrow m = q_0 B^2 R^2 / (2U).$$

Относительная атомная масса иона натрия

$$A = \frac{m}{m_{0C}/12} = \frac{6q_0 B^2 R^2}{Um_{0C}}, \quad (5)$$

где  $m_{0C} = 1,995 \cdot 10^{-26}$  кг – масса атома углерода.

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$\begin{aligned} 1 \text{ кг} &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}^2 \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ В}} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ В}} \left( \frac{1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}}{1 \text{ м}^2} \right)^2 = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ с}^2}{1 \text{ м}^2} = \\ &= \frac{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ с}^2}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ кг} \frac{1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}^2} \cdot 1 \text{ с}^2}{1 \text{ м}^2} = 1 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$A = \frac{6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5^2 \cdot 0,0437^2}{1000 \cdot 1,995 \cdot 10^{-26}} = 22,97.$$

**Пример 4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.**  $\alpha$ -Частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U$ , стала двигаться в однородном магнитном поле ( $B = 50$  мТл) по винтовой линии с шагом  $h = 5$  см и радиусом  $R = 1$  см. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла  $\alpha$ -Частица.

Дано:

$$R = 0,01 \text{ м};$$

$$h = 0,05 \text{ м};$$

$$B = 50 \cdot 10^{-3} \text{ Тл};$$

$$q = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Найти:  $U$

*Решение.* Чтобы определить разность потенциалов  $U$ , надо найти скорость  $v$   $\alpha$ -частицы ( $\text{He}^{+2}$  – ион атома гелия), которую ей сообщило электрическое поле перед тем, как она влетела в магнитное поле (см. формулу (2) в примере 3). Движение  $\alpha$ -частицы по винтовой линии можно представить как сложное движение, состоящее из движения по окружности со скоростью  $v_{\perp}$ , которая перпендикулярна индукции  $\vec{B}$ , и равномерного движения вдоль вектора  $\vec{B}$  со скоростью  $v_{\parallel}$  (рис. 47). Тогда полную скорость  $\alpha$ -частицы можно определить по формуле

$$v = (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)^{1/2}. \quad (1)$$

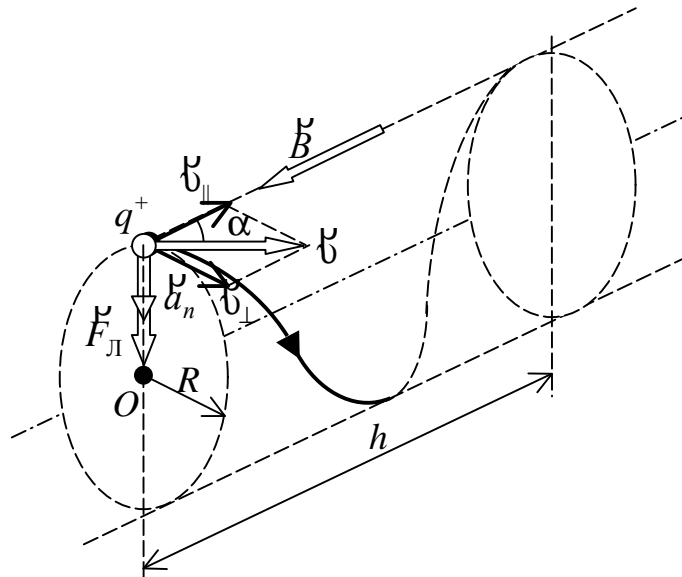


Рис. 47

Для определения скорости  $v_{\perp}$  с помощью второго закона Ньютона составим уравнение движения  $\alpha$ -частицы в проекции на нормаль к окружности радиуса  $R$ :

$$ma_n = F_L \Rightarrow mv_{\perp}^2/R = qvB \sin \alpha. \quad (2)$$

Здесь учтено, что сила Лоренца  $F_L = qvB \sin \alpha$  (см. формулу 4.14) направлена по радиусу к центру окружности. Поскольку скорость  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ , то из уравнения (2) находим, что

$$v_{\perp} = qBR/m. \quad (3)$$

Скорость  $v_{\parallel}$  для равномерного движения найдем по формуле

$$v_{\parallel} = h/T, \quad (4)$$

где  $T$  – время, в течение которого  $\alpha$ -частица продвинется в горизонтальном направлении поля на один шаг винта. С другой стороны, время  $T$  равно периоду обращения по окружности радиуса  $R$ , поэтому, учитывая выражение (3), получим

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi R m}{qBR} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (5)$$

Подставив выражение (5) в формулу (4), получаем

$$v_{\parallel} = h/T = hqB/(2\pi m). \quad (6)$$

Скорость  $v$  движения  $\alpha$ -частицы по винтовой линии находим по формуле (1):

$$v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{\left(\frac{hqB}{2\pi m}\right)^2 + \left(\frac{qBR}{m}\right)^2} = \frac{qB}{m} \sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + R^2}. \quad (7)$$

Чтобы определить ускоряющую разность потенциалов  $U$ , которую прошла  $\alpha$ -частица, воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому работа электрического поля  $A = qU$  пошла на сообщение  $\alpha$ -частице кинетической энергии  $K = mv^2/2$ :

$$\frac{mv^2}{2} = qU \Rightarrow U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{qB^2}{2m} \left[ \left( \frac{h}{2\pi} \right)^2 + R^2 \right]. \quad (8)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (8):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}^2}{1 \text{ кг}} [1 \text{ м}^2] = \frac{1 \text{ Кл} \cdot \left( \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}} \right)^2}{1 \text{ кг}} [1 \text{ м}^2] = \\ &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Н}^2 \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А}^2 \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Н}^2}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А}^2} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot \left( 1 \text{ кг} \cdot 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)^2}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А}^2} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ кг}^2 \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А}^2 \cdot 1 \text{ с}^4} = \\ &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А}^2 \cdot 1 \text{ с}^2} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ Кл}^2} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в формулу (8) и выполним расчеты:

$$U = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 6,64 \cdot 10^{-27}} \left[ \left( \frac{0,05}{2 \cdot 3,14} \right)^2 + 0,01^2 \right] = 9,84 \text{ В}.$$

**Пример 5. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле.** В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью  $S = 100 \text{ см}^2$ . Поддерживая в контуре постоянную силу тока  $I = 50 \text{ А}$ , его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию  $B$  поля, если при перемещении контура была совершена работа  $A = 0,4 \text{ Дж}$ .

*Дано:*

$$S = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$I = 50 \text{ А}; A = 0,4 \text{ Дж};$$

$$\alpha = \left( \vec{n}, \vec{B} \right) = 0^\circ$$

*Найти:*  $B$

*Решение.* Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле численно равна работе сил поля (формула (4.18)) и противоположна по знаку, т. е.

$$A = -I(\Phi_2 - \Phi_1) = I(\Phi_1 - \Phi_2). \quad (1)$$

Когда плоский контур находится в однородном магнитном поле, то магнитный поток рассчитывается по формуле (4.16):

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha = BS, \quad (2)$$

где  $\alpha = 0^\circ$  – угол между нормалью к плоскости контура и вектором



магнитной индукции.

Магнитный поток  $\Phi_2 = 0$ , т. к. контур переместили из поля в область пространства, где магнитное поле отсутствует. Тогда

$$A = I(\Phi_1 - \Phi_2) = IBS \Rightarrow B = A / IS. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (3):

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ Тл}.$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты:

$$B = \frac{0,4}{100 \cdot 10^{-4} \cdot 50} = 0,8 \text{ Тл}.$$

**Пример 6. Закон электромагнитной индукции.** В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 0,1$  Тл, вращается катушка, состоящая из  $N = 200$  витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки  $T = 0,2$  с; площадь поперечного сечения  $S = 4 \text{ см}^2$ . Определить максимальную ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}}$  во вращающейся катушке.

Дано:

$B = 0,1$  Тл;  $T = 0,2$  с;

$N = 200$  витков;

$S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$

Найти:  $\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}}$

*Решение.* Для решения задачи воспользуемся законом Фарадея – Ленца (формула (4.21)):

$$\mathcal{E}_{\text{ин}} = -\frac{d\Psi_m}{dt} = -N \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (1)$$

При вращении катушки магнитный поток  $\Phi_m$ , пронизывающий катушку, изменяется в зависимости от времени согласно формуле (4.16) по закону

$$\Phi_m = BS \cos \omega t. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1) и выполнив дифференцирование по времени, получаем

$$\mathcal{E}_{\text{ин}} = NBS\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Максимального значения ЭДС достигает при  $\sin \omega t = 1$ . Подставляя выражение ( $\omega = 2\pi / T$ ) в формулу (3), получим

$$\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}} = 2\pi NBS / T. \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (4):

$$1 \text{ В} = \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Вб/1 м}^2 \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ В}.$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0,2} = 251 \text{ мВ}.$$

### Пример 7. Магнитные характеристики соленоида.

Магнитный поток  $\Phi_m$  сквозь поперечное сечение воздушного соленоида, т. е. его потокосцепление, равен 50 мкВб. Длина соленоида  $l = 50$  см. Определить магнитный момент  $p_m$  соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

*Дано:*

$$l = 0,5 \text{ м}; \mu = 1;$$

$$\Psi = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Вб}$$

*Найти:*  $p_m$

*Решение.* Индукция магнитного поля на оси соленоида определяется по формуле (4.7):

$$B = \mu_0 \mu I n, \quad (1)$$

где  $n = N / l$  – число витков на единицу длины;

$N$  – общее число витков;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнитная постоянная.

Модуль магнитного момента соленоида (см. формулу (4.12))

$$p_m = ISN. \quad (2)$$

Полный магнитный поток сквозь сечение соленоида, т. е. его потокосцепление, находим по формуле (4.17) с учетом выражения (1):

$$\Psi = N\Phi_m = BSN = \mu_0 \mu I (N/l) SN \Rightarrow IS = \Psi l / (\mu_0 N).$$

Подставляем правую часть полученного уравнения в формулу (2):

$$p_m = \Psi l / \mu_0. \quad (3)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей формулы (3):

$$p_m = \frac{1 \text{ Вб} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ Гн/1 м}} = \frac{1 \text{ Вб} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ Вб/1 А}} = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты:

$$p_m = \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}} = 19,9 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

### Пример 8. Энергия магнитного поля. На стержень из

немагнитного материала длиной  $l = 50$  см и сечением  $S = 2$  см<sup>2</sup> намотан провод в один слой так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится  $N = 20$  витков. Определить энергию  $W_m$  магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке  $I = 0,5$  А.

*Дано:*

$$l = 0,5 \text{ м}; I = 0,5 \text{ А};$$

$$S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \mu = 1;$$

$$n = 2 \cdot 10^3 \text{ витков/м}$$

*Найти:*  $W_m$

*Решение.* Энергия магнитного поля соленоида с индуктивностью  $L$ , по обмотке которого течет ток  $I$ , выражается формулой (4.31):

$$W_m = LI^2/2. \quad (1)$$

Индуктивность  $L$  соленоида определяется по формуле (4.27):

$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu n^2 Sl, \quad (2)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $V = Sl$  – объем соленоида.

Подставив в формулу (1) выражение (2) для индуктивности  $L$ , получим

$$W_m = \mu_0 \mu n^2 SI I^2/2. \quad (3)$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты:

$$W_m = (4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^3)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 \cdot (0,5)^2)/2 = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

**Пример 9. Токи при включении и отключении источника тока.** Обмотка соленоида состоит из слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода. Диаметр провода  $d = 0,2$  мм, удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, диаметр соленоида  $D = 5$  см. По соленоиду течет ток  $I_0 = 1$  А. Определить, какое количество электричества протечет через обмотку, если ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции провода пренебречь.

*Дано:*

$$d = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$D = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$I_0 = 1 \text{ А}; \mu = 1$$

*Найти:*  $q$

*Решение.* Количество электричества, т. е. заряд  $dq$ , который протекает через поперечное сечение проводника за время  $dt$  при силе тока  $I$ , определяется равенством

$$dq = Idt.$$

Общее количество электричества  $q$ , протекающее через проводник за время  $t$ , будет

$$q = \int_0^t I dt. \quad (1)$$

Замыкание обмотки накоротко означает, что источник тока в цепи отключается, поэтому сила тока убывает экспоненциально со временем и выражается формулой (4.30):

$$I = I_0 e^{-Rt/L}, \quad (2)$$

где  $R$  – сопротивление обмотки соленоида;  $L$  – индуктивность соленоида.

Подставив выражение (2) в выражение (1) и интегрируя по времени от 0 до  $\infty$  (при  $t \rightarrow \infty$ ,  $I \rightarrow 0$ ), получим

$$q = \int_0^{\infty} I_0 e^{-Rt/L} dt = I_0 \int_0^{\infty} e^{-Rt/L} dt = I_0 \left( -\frac{L}{R} \right) e^{-Rt/L} \Big|_0^{\infty} = I_0 \frac{L}{R}. \quad (3)$$

Найдем индуктивность  $L$  соленоида и сопротивление  $R$  обмотки соленоида, которые выражаются формулами:

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l_1} S_1 = \frac{\mu_0 \mu \pi d_1^2 N^2}{4l_1}, \quad R = \rho \frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}, \quad (4)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $N$  – число витков в соленоиде;  $l_1$  – длина соленоида;  $S_1$  – сечение соленоида;  $l$  – длина провода;  $S$  – сечение провода.

Подставив найденные выражения  $L$  и  $R$  (4) в формулу (3), получим

$$q = I_0 \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 \mu N^2 \pi D^2}{4l_1 \cdot 4\rho l} \pi d^2 I_0. \quad (5)$$

Длину провода  $l$  можно выразить через диаметр  $D$  соленоида, а диаметр провода  $d$  – через длину соленоида  $l_1$ :

$$l = \pi D N, \quad d = l_1 / N. \quad (6)$$

Подставляя формулы (6) в выражение (5), получим

$$q = \frac{\pi \mu_0 \mu}{16\rho} d D I_0. \quad (7)$$

Подставим числовые значения в формулу (7) и выполним расчеты:

$$q = \frac{3,14 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{16 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ Кл},$$

**Пример 10. Электромагнитные колебания.** Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением  $U = 220$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц. Какую емкость  $C$  должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток  $I = 0,5$  А и падение напряжения на ней было равным  $U_{\text{л}} = 110$  В?

*Дано:*

$$U = 220 \text{ В};$$

$$\nu = 50 \text{ Гц};$$

$$I = 0,5 \text{ А};$$

$$U_{\text{л}} = 110 \text{ В}$$

*Найти: C*

*Решение.* Силу тока в цепи определим по закону Ома (4.44) для участка электрической цепи, содержащей только лампочку сопротивлением  $R_{\text{л}}$ :

$$I = U_{\text{л}} / R_{\text{л}}, \quad (1)$$

С другой стороны, учтя, что циклическая частота колебаний  $\omega = 2\pi\nu$ , силу тока определим, используя закон Ома для цепи, содержащей только лампочку и конденсатор:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_{\text{л}}^2 + 1/(4\pi^2\nu^2 C^2)}}. \quad (2)$$

Приравняем правые части выражений (1) и (2) и выразим емкость  $C$ :

$$C = \frac{I}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_{\text{л}}^2}}. \quad (3)$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты:

$$C = \frac{0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \sqrt{220^2 - 110^2}} = 8,36 \text{ мкФ}.$$

#### 4.5. Задачи к контрольной работе № 4

*Таблица вариантов заданий  
для студентов инженерно-технических специальностей*

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	61	71	81
2	2	12	22	32	42	62	72	83
3	3	13	23	33	43	63	73	85
4	4	14	24	34	44	64	74	87
5	5	15	25	35	45	65	75	89
6	6	16	26	36	46	66	76	91

7	7	17	27	37	47	67	77	93
8	8	18	28	38	48	68	78	95
9	9	19	29	39	49	69	79	97
0	10	20	30	40	50	70	80	99

**Таблица вариантов заданий  
для студентов химико-технологических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	82
2	2	12	22	32	42	52	62	84
3	3	13	23	33	43	53	63	86
4	4	14	24	34	44	54	64	88
5	5	15	25	35	45	55	65	90
6	6	16	26	36	46	56	66	92
7	7	17	27	37	47	57	67	94
8	8	18	28	38	48	58	68	96
9	9	19	29	39	49	59	69	98
0	10	20	30	40	50	60	70	100

### Тема 1. Расчет магнитных полей

1. По двум длинным прямым проводникам, находящимся на расстоянии 6 см друг от друга, протекают токи силой  $I_1 = 5$  А и  $I_2 = 10$  А в одном направлении. Определите индукцию магнитного поля  $B$  в точке, находящейся на расстоянии  $d = 3$  см от каждого проводника.

2. Найдите индукцию  $B$  магнитного поля в центре контура, имеющего вид прямоугольника, по которому течет ток силой  $I = 6$  А. Диагональ контура равна  $b = 14$  см, а угол между диагоналями  $\alpha = 30^\circ$ .

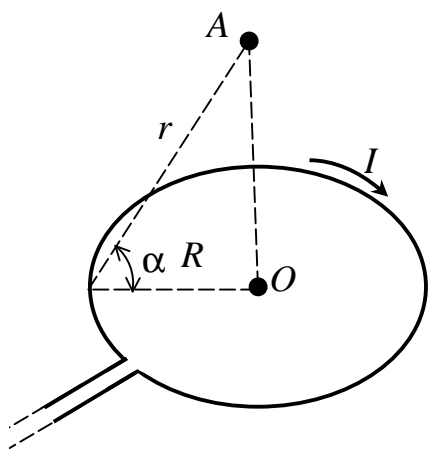


Рис. 48

3. По тонкому кольцу течет ток  $I = 60$  А. Определите напряженность  $H$  магнитного поля в точке  $A$ , равноудаленной от точек кольца на расстояние  $r = 10$  см (рис. 48). Угол  $\alpha = \pi/3$ .

4. Круговой виток расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу.

Сила тока в витке  $I_2 = 10$  А, а сила тока в проводе  $I_1 = 5$  А. Диаметр кругового витка  $D = 14$  см. Расстояние от центра витка до провода  $d = 20$  см. Определите магнитную индукцию  $B$  в центре витка.

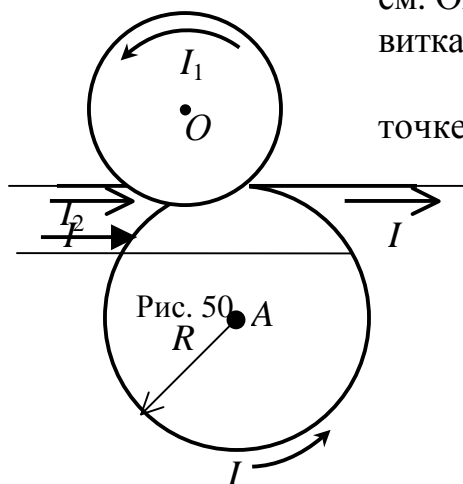


Рис. 49

5. Определите магнитную индукцию  $B$  в точке пересечения высот равностороннего треугольника со стороной  $a = 20$  см, по которому течет ток силой  $I = 50$  А.

6. Прямой бесконечный проводник имеет круглую петлю (см. рис. 49). Определите напряженность  $H$  магнитного поля в центре витка (точка  $A$ ), если диаметр петли  $R = 25$  см и по проводнику течет ток силой  $I = 5$  А.

7. Два круговых витка с током, имеющие одинаковый радиус ( $R_1 = R_2$ )

и общий центр, расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях. Магнитная индукция результирующего поля в центре витков

равна  $B = 0,2$  мТл. Магнитная индукция поля первого витка с током в этой же точке равна  $B_1 = 0,16$  мТл. Определите магнитную индукцию  $B_2$  поля второго витка в их центре и силу тока  $I_2$  в нем, если сила тока в первом витке равна  $I_1 = 10$  А.

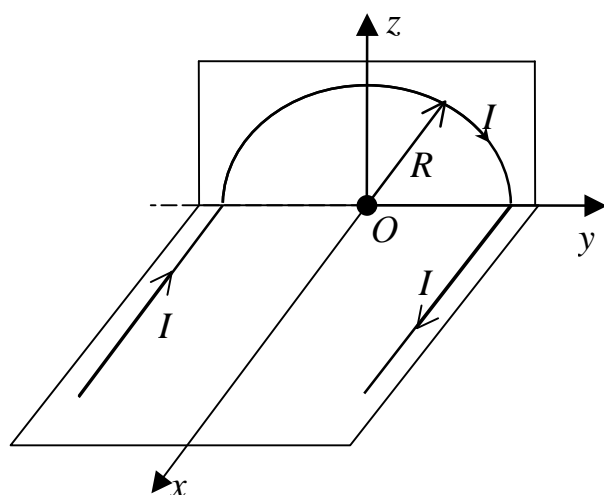
8. Определите магнитную индукцию  $B$  результирующего поля в центре катушки радиусом  $R = 20$  см, которая имеет  $N = 600$  витков и по которой течет ток силой  $I = 10$  А. Считать, что длина катушки много меньше чем ее радиус. На расстоянии  $d = 5$  см от оси катушки перпендикулярно к ее плоскости и симметрично относительно оси катушки располагаются два бесконечно длинных проводника с токами, текущими в одном направлении и равными  $I_1 = 20$  А и  $I_2 = 10$  А.

9. Круговой виток и прямолинейный проводник с током находятся в одной плоскости (см. рис. 50). Расстояние от прямолинейного проводника до центра витка равно  $d = 8$  см, радиус витка  $R = 4$  см, сила тока в витке равна  $I_1 = 15$  А, сила тока в проводнике  $I_2 = 20$  А. Найдите напряженность  $H$  и индукцию  $B$  магнитного поля в центре кругового витка. Как изменится индукция магнитного поля в той же точке, если направление тока в прямолинейном проводнике изменится на

противоположное?

магнитную  
точку  $O$ , если  
форму, пока-  
и по нему  
А. Радиус  
проводника

участки  
длинные.



10. Найдите  
индукцию  $B$  в  
проводник имеет  
занную на рис. 51,  
у протекает ток  $I = 9$   
изогнутой части  
 $R = 100$  мм, а  
прямолинейные  
проводника очень

**Тема 2.**

Рис. 51

**Сила Ампера.  
Вращательный**

**момент, который действует  
на контур с током в магнитном поле. Магнитный момент**

11. Проводник длиной  $l = 1$  м, по которому проходит ток  $I = 2$  А, согнут в форме полукольца и расположен в плоскости, перпендикулярной к направлению индукции  $\vec{B}$  магнитного поля ( $B = 10^{-5}$  Тл). Рассчитайте силу, действующую на этот проводник в магнитном поле.

12. Металлический стержень длиной  $l = 0,2$  м расположен перпендикулярно бесконечно длинному прямому проводу, по



которому течет ток силой  $I_2 = 3$  А. Найдите силу, действующую на стержень со стороны магнитного поля, создаваемого проводом, если по стержню течет ток силой  $I_1 = 1$  А, а расстояние от провода до ближайшего конца стержня  $r = 10$  см.

13. Два прямолинейных длинных параллельных проводника, по которым текут токи в одном направлении силой  $I_1 = 7$  А и  $I_2 = 14$  А, находятся на расстоянии  $r_1 = 10$  см друг от друга. Какую работу, отнесенную к длине проводника, надо совершить, чтобы увеличить расстояние между проводниками до  $r_2 = 0,2$  м?

14. В однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B = 2$  Тл и направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вертикали, вертикально вверх движется прямой проводник массой  $m = 1,5$  кг, по которому течет ток силой  $I = 4$  А. Через  $t = 5$  с после начала движения проводник имеет скорость  $v = 12$  м/с. Определите длину  $l$  проводника.

15. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи  $I = 1$  кА. Определите силу  $F$ , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

16. Квадратная рамка гальванометра, содержащая  $N = 200$  витков тонкого провода, подвешена на упругой нити. Длина стороны рамки  $a = 1$  см. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции  $\vec{B}$  ( $B = 5$  мТл). Когда по рамке пропустили ток  $I = 2$  мкА, она повернулась на угол  $\phi = 30^\circ$ . Найдите постоянную кручения нити  $f_{кр}$ . Постоянной кручения нити называется величина, численно равная отношению момента силы, действующей на рамку, к углу закручивания ( $f_{кр} = M/\phi$ ).

17. Рамка гальванометра длиной  $a = 4$  см и шириной  $b = 4$  см, содержащая  $N = 200$  витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Какой вращающий момент  $M$  действует на рамку, когда по витку течет ток силой  $I = 1$  мА? Каков магнитный момент  $p_m$  рамки при этом токе?

18. Короткая катушка площадью поперечного сечения  $S = 150$  см<sup>2</sup>, содержащая  $N = 200$  витков тонкого провода, по которому течет ток  $I = 4$  А, помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H = 8$  кА/м. Определите магнитный момент  $p_m$

катушки, а также вращающий момент  $M$ , действующий на нее со стороны поля, если ось катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с линиями поля.

19. По тонкому стержню длиной  $l = 20$  см равномерно распределен заряд  $q = 240$  нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10$  рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определите магнитный момент  $p_m$ , обусловленный вращением заряженного стержня.

20. Диск радиусом  $R = 10$  см несет равномерно распределенный по поверхности заряд  $q = 0,2$  мкКл. Диск равномерно вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Частота вращения  $n = 20$  с<sup>-1</sup>. Определите магнитный момент  $p_m$  кругового тока, создаваемого диском. Масса диска  $m = 0,1$  кг.

### ***Тема 3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях***

21. Протон разгоняется в электрическом поле с разностью потенциалов  $U = 1,5$  кВ из состояния покоя и попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. В магнитном поле он движется по дуге окружности радиусом  $R = 56$  см. Определите напряженность  $H$  магнитного поля, если движение происходит в вакууме.

22. Однородное электрическое поле с напряженностью  $E = 100$  В/см перпендикулярно к однородному магнитному полю с индукцией  $B = 0,02$  Тл. Электрон влетает в эти поля перпендикулярно к векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . При какой начальной скорости  $v_1$  электрон будет двигаться в этих полях прямолинейно? При какой скорости  $v_2$  протоны будут двигаться прямолинейно?

23. Электрон движется в однородном магнитном поле с напряженностью  $H = 75$  А/м так, что его скорость составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением поля. Определите радиус  $R$  витков траектории электрона и расстояние  $l$ , пройденное им вдоль линий магнитной индукции за три витка, если скорость электрона равна  $v = 2,5 \cdot 10^6$  м/с.

24. Протон движется в однородном магнитном поле с напряженностью  $H = 100$  А/м в плоскости, перпендикулярной к линиям напряженности магнитного поля. Определите траекторию

( $R$ ) движения протона, если оно происходит в вакууме со скоростью  $v = 1,2 \cdot 10^3$  м/с. Чему равен период  $T$  обращения протона в магнитном поле?

25. Электрон разгоняется в вакууме из состояния покоя под действием электрического поля и влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Определите ускоряющую разность потенциалов  $U$  электрического поля и индукцию магнитного поля, если электрон описывает окружность радиусом  $R = 7,58 \cdot 10^{-3}$  м за время  $t = 5,96 \cdot 10^{-10}$  с.

26. Электрон влетает в однородное магнитное поле под углом  $\alpha = 45^\circ$  к линиям магнитной индукции и движется по винтовой линии с шагом  $h = 20$  мм. Магнитная индукция поля  $B = 1 \cdot 10^{-2}$  Тл. Определите импульс  $p$  частицы.

27. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,4$  Тл под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению вектора  $\vec{B}$  и движется по винтовой линии радиуса  $R = 0,5$  см. Найдите кинетическую энергию  $W_k$  протона.

28. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью  $v = 400$  км/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ , модуль которого  $B = 1 \cdot 10^{-3}$  Тл. Сколько витков  $N$  опишет электрон вдоль магнитного поля на расстоянии  $r = 2$  м? Отношение заряда электрона к его массе  $q_e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

29. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем напряженностью  $E = 6 \cdot 10^4$  В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определите модуль и направление вектора магнитной индукции  $B$  однородного магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона  $W = 1,6 \cdot 10^{-6}$  Дж.

30. Однозарядные ионы аргона из состояния покоя разгоняются в электрическом поле с разностью потенциалов  $U = 800$  В, затем попадают в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям магнитной индукции и разделяются на два пучка, движущихся по дугам радиусом  $R_1 = 7,63$  см и  $R_2 = 8,05$  см. Индукция магнитного

поля равна  $B = 0,32$  Тл. Определите массовые числа  $A$  изотопов аргона. Движение ионов происходит в вакууме.

**Тема 4. Магнитный поток. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле**

31. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 1$  Тл, движется равномерно прямой проводник длиной  $l = 20$  см, по которому течет ток силой  $I = 2$  А. Скорость проводника равна  $v = 15$  см/с и направлена перпендикулярно вектору индукции. Найдите работу  $A$  перемещения проводника за  $t = 5$  с.

32. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 0,25$  Тл, находится плоская катушка диаметром  $D = 12,5$  см, содержащая  $N = 100$  витков. Плоскость катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением вектора индукции магнитного поля. Определите, какую работу  $A$  надо совершить, чтобы удалить катушку из магнитного поля, если по виткам течет ток силой  $I = 3$  А.

33. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 60$  мТл находится прямоугольная рамка шириной  $a = 5$  см и длиной  $b = 8$  см. Рамка состоит из  $N = 200$  витков провода и может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к линиям магнитной индукции. При силе тока в витках  $I = 0,5$  А плоскость рамки располагается перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Какую работу  $A$  надо совершить, чтобы повернуть рамку из этого положения на  $1/2$  оборота и на целый оборот? Силу тока в цепи считать неизменной.

34. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I = 50$  А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной  $l = 65$  см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Каков магнитный поток  $\Phi_m$ , пронизывающий рамку?

35. Тороид квадратного сечения содержит  $N = 1000$  витков. Наружный диаметр тороида  $D = 40$  см, внутренний –  $d = 20$  см. Найдите магнитный поток  $\Phi_m$  в тороиде, если сила тока, протекающего по обмотке, равна  $I = 10$  А.

36. На расстоянии  $d_1 = 10$  см от бесконечно длинного прямолинейного проводника с током  $I_1 = 5$  А находится параллельно ему участок другого проводника длиной  $l = 2$  м с током  $I_2 = 12$  А. Определите работу  $A$ , которую нужно выполнить, чтобы расстояние между проводниками изменилось от  $d_1$  до  $d_2 = 20$  см.

37. Тонкий медный проводник массой  $m = 1$  г согнут в виде квадрата и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ( $B = 0,1$  Тл) так, что плоскость его перпендикулярна линиям поля. Определите количество электричества  $q$ , которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию. Удельное сопротивление меди  $\rho = 0,17 \cdot 10^{-7}$  Ом·м, а плотность меди  $\rho^* = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

38. По длинному прямому проводнику течет ток. Вблизи проводника расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением  $R = 0,02$  Ом. Проводник лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны  $a_1 = 10$  см,  $a_2 = 20$  см. Найдите силу тока  $I$  в проводнике, если при его выключении через рамку протекло количество электричества  $q = 693$  мкКл.

39. Магнитный момент соленоида  $p_m = 19,9$  А·м<sup>2</sup>. Длина соленоида  $l = 50$  см. Определите магнитный поток  $\Phi_m$  сквозь сечение соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

40. Рамка из провода сопротивлением  $R = 0,01$  Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,05$  Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Найдите, какое количество электричества  $q$  протечет через рамку за время поворота ее на угол  $\Delta\alpha = 30^\circ$  в следующих случаях: 1) от  $\alpha_1 = 30^\circ$  до  $\alpha_2 = 60^\circ$ ; 2) от  $\alpha_2 = 60^\circ$  до  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

### ***Тема 5. Явление электромагнитной индукции***

41. Рамка площадью  $S = 3 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup> имеет  $N = 200$  витков и вращается с постоянной угловой скоростью в магнитном поле с индукцией  $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$  Тл. Ось рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции. Найдите период  $T$  вращения рамки, если максимальная ЭДС индукции в рамке  $\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}} = 14$  В.

42. В однородном магнитном поле, индукция которого  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл, вращается стержень длиной  $l = 1$  м с постоянной угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна линиям индукции магнитного поля. Найдите ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{ин}}$ , возникающую в стержне.

43. Медное кольцо помещено в магнитное поле так, что его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Диаметр кольца  $D = 25$  см, диаметр провода кольца  $d = 3$  мм. Определите скорость изменения магнитной индукции  $dB/dt$  поля, если в кольце возникает индукционный ток силой  $I_{\text{ин}} = 5$  А. Удельное сопротивление меди  $\rho = 0,17 \cdot 10^{-7}$  Ом·м.

44. Рамка площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> содержит  $N = 10^3$  витков провода сопротивлением  $R = 12$  Ом. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление  $R_1 = 20$  Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле ( $B = 0,1$  Тл), делая  $n = 8$  об/с. Чему равно максимальное значение мощности  $P_{\text{max}}$  переменного тока в цепи?

45. Короткая катушка, содержащая  $N = 1000$  витков, равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega = 5$  рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям поля. Магнитное поле однородное с индукцией  $B = 0,04$  Тл. Определите мгновенное значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{ин}}$  для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с линиями поля. Площадь катушки  $S = 100$  см<sup>2</sup>.

46. Прямой проводник длиной  $l = 10$  см помещен в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи  $R = 0,4$  Ом. Какая мощность  $P$  потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции со скоростью  $v = 20$  м/с?

47. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,1$  Тл. Плоскость рамки составляет с направлением вектора магнитной индукции угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определите длину  $l$  стороны рамки, если при равномерном уменьшении магнитного поля до нуля за время  $t = 0,01$  с в рамке индуцируется ЭДС  $\mathcal{E}_{\text{ин}} = 2$  мВ.

48. Катушка диаметром  $d = 2$  см, содержащая один слой плотно прилегающих друг к другу  $N = 500$  витков медного провода сечением  $S = 2$  мм<sup>2</sup>, помещена в магнитное поле. Ось катушки параллельна линиям индукции. Магнитная индукция поля равномерно изменяется со скоростью  $dB/dt = 1$  мТл/с. Определите тепловую мощность  $P$ , выделяющуюся в катушке, если ее концы замкнуты накоротко. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

49. Проволочная рамка, содержащая  $N = 40$  витков, охватывает площадь  $S = 240 \text{ см}^2$ . Вокруг нее создается однородное магнитное поле, перпендикулярное к ее плоскости. При повороте рамки на  $1/6$  оборота за  $t = 0,15 \text{ с}$  в ней наводится ЭДС индукции, равная  $\mathcal{E}_{\text{ин}} = 160 \text{ мВ}$ . Определите индукцию  $B$  магнитного поля.

50. Индукция магнитного поля между полюсами двухполюсного генератора  $B = 0,8 \text{ Тл}$ . Ротор имеет  $N = 100$  витков площадью  $S = 400 \text{ см}^2$ . Сколько оборотов в минуту делает якорь, если максимальное значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{ин}}^{\text{max}} = 200 \text{ В}$ ?

### **Тема 6. Индуктивность. Явление самоиндукции**

51. Определите индуктивность соленоида длиной  $l = 40 \text{ см}$  и сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$ , если обмоткой соленоида является медная проволока массой  $m = 1 \text{ кг}$ . Плотность меди  $\rho^* = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а ее удельное сопротивление  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

52. Через катушку, индуктивность которой  $L = 21 \text{ мГн}$ , течет ток, изменяющийся со временем по закону  $I = I_{\text{max}} \sin \omega t$ , где  $I_{\text{max}} = 5 \text{ А}$ ,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T = 0,02 \text{ с}$ . Найдите зависимость от времени ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c(t)$ , возникающей в катушке и энергии магнитного поля  $W_m(t)$  катушки.

53. Сколько витков проволоки  $N$  диаметром  $d = 0,4 \text{ мм}$  с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром  $D = 2 \text{ см}$ , чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью  $L = 1 \text{ мГн}$ ? Витки вплотную прилегают друг к другу.

54. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет  $N = 750$  витков и индуктивность  $L_1 = 25 \text{ мГн}$ . Чтобы увеличить индуктивность катушки до  $L_2 = 36 \text{ мГн}$ , обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков  $N$  оказалось в катушке после перемотки?

55. Соленоид содержит  $N = 1000$  витков. Сечение сердечника  $S = 10 \text{ см}^2$ . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией  $B = 1,5 \text{ Тл}$ . Найдите среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$ , которая возникнет в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время  $t = 500 \text{ мкс}$ .

56. На катушке с сопротивлением  $R = 8,2 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 25 \text{ мГн}$  поддерживается постоянное напряжение  $U = 55 \text{ В}$ . Сколько энергии  $W$  выделится при размыкании цепи катушки? Какая средняя

ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$  появится при этом в катушке, если энергия будет выделяться в течение времени  $t = 12$  мс?

57. Соленоид диаметром  $D = 10$  см и длиной  $l = 60$  см имеет  $N = 1000$  витков. Сила тока в нем равномерно возрастает на  $\Delta I = 0,2$  А за  $\Delta t = 1$  с. На соленоид надето кольцо из медной проволоки, имеющей площадь поперечного сечения  $S = 1$  мм<sup>2</sup>. Найдите силу индукционного тока  $I_{\text{ин}}$ , возникающего в кольце. Удельное сопротивление меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

58. Индуктивность соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас,  $L = 1,6$  мГн. Длина соленоида  $l = 1$  м, сечение  $S = 20$  см<sup>2</sup>. Сколько витков  $N$  приходится на каждый сантиметр длины соленоида?

59. Индуктивность катушки  $L = 2$  мГн. Ток частотой  $\nu = 50$  Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Чему равно среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle \mathcal{E}_c \rangle$ , возникающей за интервал времени  $\Delta t$ , в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения? Амплитудное значение силы тока  $I_0 = 10$  А.

60. На картонный каркас длиной  $l = 50$  см и площадью сечения  $S = 4$  см<sup>2</sup> намотан в один слой провод диаметром  $d = 0,2$  мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Вычислите индуктивность  $L$  получившегося соленоида.

### ***Тема 7. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии***

61. Соленоид длиной  $l = 50$  см и радиусом  $R = 0,4$  см имеет  $N = 20\,000$  витков медного провода и находится под постоянным напряжением. Определите время  $t$ , в течение которого в обмотке соленоида выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в соленоиде. Удельное сопротивление меди равно  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

62. Тороид содержит  $N = 20$  витков на  $l = 1$  см. Определите объемную плотность энергии  $w_m$  в тороиде, если по его обмотке протекает ток  $I = 3$  А.

63. Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида длиной  $l = 1$  м и радиусом  $R = 2$  см равна  $w_m = 0,1$  Дж/м<sup>3</sup>. Определите силу тока  $I$  в соленоиде, если его индуктивность равна  $L =$



$= 0,4 \text{ мГн.}$

64. Тороид с железным сердечником длиной  $l = 20 \text{ см}$  имеет воздушный зазор  $b = 10 \text{ мм}$ . По обмотке тороида, содержащей  $N = 500$  витков, проходит ток  $I = 3 \text{ А}$ . Найдите плотность энергии  $w_m$  магнитного поля в сердечнике и воздушном зазоре, если при этих условиях магнитная проницаемость сердечника  $\mu = 580$ . Рассеянием магнитного потока пренебречь.

65. Какова должна быть напряженность  $E$  однородного электрического поля, чтобы оно обладало той же плотностью энергии, что и магнитное поле индукцией  $B = 0,5 \text{ Тл}$ ?

66. Определите энергию  $W_m$  магнитного поля соленоида, имеющего  $N = 500$  витков, которые равномерно намотаны на картонный каркас радиусом  $R = 20 \text{ мм}$  и длиной  $l = 50 \text{ см}$ , если по нему проходит ток  $I = 5 \text{ А}$ .

67. Соленоид содержит  $N = 1000$  витков. Сила тока в обмотке соленоида  $I = 1 \text{ А}$ , магнитный поток  $\Phi_m = 0,01 \text{ Вб}$ . Вычислите энергию  $W_m$  магнитного поля.

68. На железное кольцо (тороид) намотано в один слой  $N = 200$  витков. Чему равна энергия  $W_m$  магнитного поля, если при токе  $I = 2,5 \text{ А}$  магнитный поток в железе  $\Phi_m = 0,5 \text{ мВб}$ ?

69. При некоторой силе тока плотность энергии магнитного поля соленоида (без сердечника)  $w_m = 0,2 \text{ Дж/м}^3$ . Во сколько раз увеличится плотность энергии  $w_{m_2} / w_{m_1}$  поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?

70. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки радиусом  $R = 0,4 \text{ мм}$  имеет длину  $l = 0,5 \text{ м}$  и поперечное сечение  $S = 50 \text{ см}^2$ . Какой ток  $I$  течет по обмотке при напряжении  $U = 10 \text{ В}$ , если за время  $t = 0,4 \text{ мс}$  в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

### ***Тема 8. Токи при включении и отключении источника тока.***

#### ***Взаимная индукция***

71. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением  $r = 10 \text{ Ом}$  и индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$ . Через какое время  $t$  сила тока замыкания достигнет  $0,9$  предельного значения?

72. Цепь состоит из катушки индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $r = 10 \text{ Ом}$ . Определите время  $t$ , по истечении

которого сила тока уменьшится до  $I = 0,001I_0$  первоначального значения после отключения источника тока.

73. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется со скоростью  $dI_1/dt = 5 \text{ А/с}$ , во второй катушке возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{ин}_2} = 0,1 \text{ В}$ . Определите коэффициент взаимной индукции катушек  $L_{12}$ .

74. Катушку индуктивностью  $L = 0,6 \text{ Гн}$  подключают к источнику тока. Определите сопротивление  $R$  катушки, если за время  $t = 3 \text{ с}$  сила тока через катушку достигает 80% предельного значения.

75. Бесконечно длинный соленоид длиной  $l = 0,8 \text{ м}$  имеет однослойную обмотку из алюминиевого провода массой  $m = 0,4 \text{ кг}$ . Определите время релаксации  $\tau$  для этого соленоида. Плотность алюминия соответственно  $\rho^* = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а его удельное сопротивление  $\rho = 26 \text{ нОм}\cdot\text{м}$ .

76. Катушка индуктивностью  $L = 1,5 \text{ Гн}$  и сопротивлением  $R_1 = 15 \text{ Ом}$  и резистор сопротивлением  $R_2 = 150 \text{ Ом}$  соединены параллельно и подключены к источнику, электродвижущая сила которого  $\mathcal{E} = 60 \text{ В}$ . Определите напряжение  $U$  на зажимах катушки через время  $t = 0,1 \text{ с}$  после размыкания цепи.

77. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет  $N_1 = 251$  виток. Средний диаметр тороида  $D = 8 \text{ см}$ , диаметр витков  $d = 2 \text{ см}$ . На тороид намотана вторичная обмотка, имеющая  $N_2 = 100$  витков. При замыкании первичной обмотки в ней в течение  $t = 0,001 \text{ с}$  устанавливается ток силой  $I = 3 \text{ А}$ . Найдите среднее значение ЭДС индукции  $\langle \mathcal{E}_{\text{ин}} \rangle$ , возникающей на вторичной обмотке.

78. Два соленоида с индуктивностями  $L_1 = 0,5 \text{ Гн}$  и  $L_2 = 0,95 \text{ Гн}$  одинаковой длины и практически равных сечений вставлены один в другой. Определите взаимную индуктивность  $L_{12}$  соленоидов.

79. Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки  $L_1 = 0,15 \text{ Гн}$ , второй –  $L_2 = 3,1 \text{ Гн}$ . Сопротивление второй катушки  $R_2 = 300 \text{ Ом}$ . Определите силу тока  $I_2$  во второй катушке, если за время  $\Delta t = 0,01 \text{ с}$  сила тока в первой катушке уменьшилась от  $I_1 = 0,5 \text{ А}$  до  $I_2 = 0 \text{ А}$ .

80. К источнику тока с внутренним сопротивлением  $r = 2 \text{ Ом}$  была подключена катушка, индуктивность которой  $L = 0,5 \text{ Гн}$ , а сопротивление  $R = 8 \text{ Ом}$ . Найдите время  $\Delta t$ , в течение которого сила тока

в катушке, нарастая, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1%.

### **Тема 9. Электромагнитные колебания и волны**

81. Катушка с активным сопротивлением  $R = 10$  Ом и индуктивностью  $L$  включена в цепь переменного тока напряжением  $U = 127$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц. Найдите индуктивность катушки  $L$ , если известно, что катушка поглощает мощность  $P = 400$  Вт, а сдвиг фаз между напряжением и силой тока  $\varphi = 60^\circ$ .

82. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 2,22$  нФ и катушки длиной  $l = 20$  см из медной проволоки радиусом  $r = 0,25$  мм. Найдите логарифмический декремент затухания  $\delta$  колебаний.

83. Определите длину электромагнитной волны  $\lambda$  в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд конденсатора составляет  $q_{\max} = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл, а максимальная сила тока в контуре равна  $I_{\max} = 1$  А. Какова энергия электрического поля конденсатора в тот момент, когда энергия магнитного поля составляет  $3/4$  от ее максимального значения, если индуктивность контура равна  $L = 0,2$  мГн? Активным сопротивлением контура пренебречь.

84. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 405$  нФ, катушки с индуктивностью  $L = 10$  мГн и резистора сопротивлением  $R = 2$  Ом. Определите, во сколько раз уменьшится разность потенциалов  $U_1/U_2$  на обкладках конденсатора за один период колебаний.

85. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью  $L = 30$  мГн и плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 0,01$  м<sup>2</sup> и расстоянием между ними  $d = 0,1$  мм. Определите диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора, если контур настроен на длину волны  $\lambda = 750$  м.

86. В электрической цепи с малым активным сопротивлением, содержащей конденсатор емкостью  $C = 0,2$  мкФ и катушку индуктивностью  $L = 1$  мГн, сила тока при резонансе изменяется по закону

$$I = 0,02 \sin \omega t.$$

Найдите мгновенное значение силы тока  $i$ , а также мгновенные значения напряжений на конденсаторе  $u_1$  и катушке  $u_2$  через время  $t = (1/3)T$  от начала возникновения колебаний.

87. Определите отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля  $W_m/W_e$  для момента времени  $t = (1/8)T$ . Напряжение в колебательном контуре изменяется по закону  $U = U_{\max} \cos \omega t$ .

88. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью  $L = 6$  мГн и конденсатор емкостью  $C = 1,2$  нФ. Для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе  $U_{\max} = 2$  В необходимо подводить среднюю мощность  $\langle P \rangle = 0,2$  мВт. Определите добротность  $Q$  колебательного контура, считая затухание в контуре достаточно малым.

89. Заряженный конденсатор емкостью  $C = 0,2$  мкФ подключили к катушке индуктивностью  $L = 8$  мГн. Через какое время  $t$  от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

90. В цепь переменного тока частотой  $\nu = 50$  Гц включена катушка длиной  $l = 0,3$  м и диаметром  $D = 2,5$  см, содержащая  $N = 1500$  витков. Определите активное сопротивление  $R$  катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током составляет  $\varphi = 30^\circ$ .

91. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 2$  мкФ и катушки индуктивностью  $L = 100$  мГн. Активное сопротивление катушки  $R = 10$  Ом. Определите логарифмический декремент затухания  $\delta$  контура.

92. Найдите промежуток времени  $\tau$ , за который амплитуда колебаний силы тока в контуре с добротностью  $Q = 5000$  уменьшается в 2 раза, если частота свободных затухающих колебаний в контуре  $\omega = 2,2$  МГц.

93. Емкость колебательного контура  $C = 10$  мкФ, индуктивность  $L = 25$  мГн и активное сопротивление  $R = 1$  Ом. Через сколько колебаний  $N$  амплитуда силы тока в контуре уменьшится в  $e$  раз?

94. В контуре, добротность которого  $Q = 50$  и собственная частота  $\omega_0 = 5,5$  кГц, возбуждаются затухающие колебания. Через какое время  $\tau$  энергия, запасенная в контуре, уменьшится в 2 раза?

95. Колебательный контур имеет емкость  $C = 1,1$  нФ и индуктивность  $L = 5$  мГн. Логарифмический декремент затухания контура

$\delta = 0,005$ . За какое время  $\tau$  потеряется вследствие затухания 99% энергии контура?

96. Какую мощность  $P$  должен потреблять колебательный контур с активным сопротивлением  $R = 1,8$  Ом, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой силы тока  $I_{\max} = 20$  мА?

97. Параметры колебательного контура имеют значения:  $C = 3,2$  нФ,  $L = 9,6$  мкГн,  $R = 0,66$  Ом. Какую мощность  $P$  должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе  $U_{\max} = 12$  В?

98. Катушка, индуктивность которой  $L = 30$  мкГн, присоединена к плоскому конденсатору. Площадь каждой пластины  $S = 100$  см<sup>2</sup>, расстояние между ними  $d = 0,1$  мм. Определите диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на монохроматическую электромагнитную волну, длина которой  $\lambda = 750$  м.

99. Радиолокатор работает на длине волны  $\lambda = 20$  см и за время  $t = 2$  с излучает  $N = 4000$  импульсов длительностью  $\Delta t = 0,02$  мкс каждый. Определите число колебаний  $n$  в одном импульсе и глубину  $l$  действия радиолокатора.

100. В резонансно настроенном колебательном контуре индуктивностью  $L = 0,75$  Гн под действием внешнего синусоидального напряжения с амплитудой  $U_{\max} = 200$  В установился переменный ток, амплитуда которого  $I_{\max} = 20$  А. Затем клеммы контура отключают от источника и замыкают накоротко. Найдите время  $\tau$ , за которое в режиме затухающих колебаний амплитуда силы тока в контуре уменьшится в  $e$  раз.



# ОПТИКА. СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5\*

### 5.1. Содержание учебной программы по разделам «Оптика», «Строение и физические свойства вещества» (для инженерно-технических специальностей)

**1. Элементы геометрической оптики и фотометрические величины.** Основные понятия и законы геометрической оптики. Оптическая длина пути и принцип Ферма. Преломление на сферической поверхности. Линзы. Формула тонкой линзы. Погрешности оптических систем. Световой поток. Сила света. Освещенность. Светимость и яркость.

**2. Интерференция света.** Когерентность и монохроматичность световых волн. Время и длина когерентности. Принцип суперпозиции волн. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Способы наблюдения интерференции света. Интерференция света на тонких пленках. Интерференционные приборы.

**3. Дифракция света.** Явление дифракции света и условия ее наблюдения. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция сферических и плоских волн. Разрешающая способность оптических приборов. Дифракционная решетка и ее применение. Основы голографии. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа – Брэгга. Рентгеноструктурный анализ. Дифракция электронов. Волновые свойства микрочастиц.

**4. Дисперсия и поглощение света.** Возбуждение вторичных электромагнитных волн при прохождении света через вещество. Фазовая и групповая скорости света. Определение дисперсии света. Области нормальной и аномальной дисперсии. Электронная теория дисперсии. Применение дисперсии. Излучение Вавилова – Черенкова. Поглощение света веществом. Закон Бугера – Ламберта.

**5. Поляризация света.** Естественный и поляризованный свет. Виды поляризации света. Поляризация света при отражении и преломлении. Формулы Френеля. Закон Брюстера. Оптически анизотропные среды. Двойное лучепреломление света. Одноосные и

---

\* Материал этой работы подготовлен Тульевым В. В. и Бобровичем О. Г.

двуосные кристаллы. Методы получения и анализа поляризованного света. Закон Малюса. Искусственная оптическая анизотропия. Вращение плоскости поляризации.

**6. Тепловое излучение.** Характеристики теплового излучения. Закон Кирхгофа. Абсолютно черное тело. Законы Стефана – Больцмана и Вина. Квантовая гипотеза и формула Планка для излучения абсолютно черного тела. Оптическая пирометрия.

**7. Квантовые свойства излучения.** Внешний фотоэффект, его наблюдение и законы. Фотоэлементы, фотоумножители и их применение. Масса и импульс фотона. Эффект Комптона и его теория. Давление света. Опыты Лебедева. Квантовое и волновое объяснение давления света. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения материи. Фотонный газ. Распределение Бозе – Эйнштейна.

**8. Модель атома водорода.** Опыты Резерфорда по изучению строения атома. Закономерности спектров излучения атома водорода. Опыты Франка и Герца. Дискретность энергетических уровней в атоме. Атом водорода и его спектр излучения по теории Бора. Водородоподобные атомы. Недостатки теории Бора. Уравнение Шредингера для атома водорода. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Кратность вырождения уровней энергии.

**9. Сложные атомы и молекулы.** Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона. Спиновое квантовое число. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева. Рентгеновские спектры. Энергетические уровни молекул. Спектры атомов и молекул. Комбинационное рассеяние. Люминесценция. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение. Принцип детального равновесия и формула Планка. Лазеры.

**10. Физика твердого тела.** Кристаллическое состояние. Типы кристаллических решеток. Теплємкость кристаллов. Ее зависимость от температуры. Закон Дюлонга и Пти. Теплємкость твердого тела по моделям Эйнштейна и Дебая. Квантовая теория свободных электронов в металле. Плотность энергетических состояний. Распределение Ферми – Дирака. Энергетические зоны в кристаллах. Металлы, полупроводники, диэлектрики. Электропроводность металлов. Собственная и примесная электропроводность полупроводников. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. Контакт двух металлов. Контактная разность потенциалов. Термоэлектрические явления. Контакт металла и полупроводника, *p-n*-переход. Полупроводниковые приборы. Сверхпроводимость.



Тепловые и магнитные свойства сверхпроводников. Эффект Мейснера. Сверхпроводники первого и второго рода. Физические представления о механизме сверхпроводимости. Эффекты Джозефсона. Высокотемпературная сверхпроводимость.

**11. Жидкие кристаллы.** Типы жидких кристаллов: нематики, холестерики, смектики. Примеры жидких кристаллов. Фазовые переходы в жидких кристаллах. Упругие свойства нематиков. Поведение в электрическом и магнитном полях. Применение жидких кристаллов.

**12. Физика атомного ядра и элементарных частиц.** Заряд, размер и масса атомного ядра. Ядерные силы. Дефект массы и энергия связи ядра. Радиоактивный распад. Закономерности  $\alpha$ - и  $\beta$ -распада атомных ядер.  $\gamma$ -Излучение. Ядерные реакции и законы сохранения. Реакция деления ядра. Цепная реакция деления. Понятие о ядерной энергетике. Реакция синтеза атомных ядер. Элементарные частицы, их классификация и взаимная превращаемость. Понятие о проблемах современной физики и астрофизики.

**5.2. Содержание учебной программы по разделам**  
**«Оптика геометрическая, волновая и квантовая»,**  
**«Строение и свойства вещества», «Элементы ядерной физики**  
**и физики элементарных частиц»**  
**(для химико-технологических специальностей)**

**1. Элементы фотометрии и геометрической оптики.** Энергетические фотометрические величины: поток энергии излучения, сила света, энергетическая светимость, энергетическая яркость, энергетическая освещенность. Световые фотометрические величины: световой поток, светимость, яркость, освещенность. Закон прямолинейного распространения света. Световые лучи. Принцип Ферма. Законы отражения и преломления света. Абсолютный и относительный показатели преломления света. Полное внутреннее отражение. Линзы. Таутохронность линз.

**2. Интерференция и дифракция световых волн.** Электромагнитная природа света. Фазовая скорость световой волны в вакууме и веществе. Световой вектор. Интенсивность света. Монохроматичность и когерентность световых волн. Явление интерференции света. Способы получения когерентных световых волн. Интерференционная картина от двух когерентных источников

света. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода интерферирующих волн. Интерференция света на тонких пленках. Кольца Ньютона. Просветление оптических приборов. Многолучевая интерференция. Интерферометры. Явление дифракции света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске. Метод зон Френеля. Дифракция Фраунгофера на щели и дифракционной решетке. Дифракционные спектры. Угловая дисперсия и разрешающая способность дифракционной решетки и спектральных оптических приборов. Дифракция рентгеновского излучения на пространственной кристаллической решетке. Формула Вульфа – Брэггов. Рентгеноструктурный и рентгенофазовый анализ кристаллических твердых тел. Понятие о голографии.

**3. Взаимодействие световых волн с веществом.** Возбуждение вторичных электромагнитных волн при прохождении света через вещество. Поглощение света. Групповая скорость света. Нормальная и аномальная дисперсии. Дисперсионный спектр. Основы электронной теории дисперсии света. Явление поляризации света. Естественный и поляризованный свет. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков. Формулы Френеля. Закон Брюстера. Двойное лучепреломление. Дихроизм поглощения. Поляризационные призмы и поляроиды. Анализ поляризованного света. Закон Малюса. Искусственная оптическая анизотропия. Эффекты Керра и Коттона – Мутона. Оптически активные вещества. Вращение плоскости поляризации света. Явление Фарадея.

**4. Квантовая природа электромагнитного излучения.** Тепловое излучение. Характеристики равновесного теплового излучения. Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стефана – Больцмана. Оптическая пирометрия. Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела. Законы Вина. Формула Рэлея – Джинса. Гипотеза Планка о квантовом характере излучения. Формула Планка. Фотоны. Энергия фотона. Фотоэлектрический эффект. Законы внешнего фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Вакуумные фотоэлементы. Масса и импульс фотона. Давление света. Эффект Комптона и его теория. Единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения.

**5. Строение атома водорода.** Излучение электромагнитной энергии атомами. Возбуждение излучения и его разложение в спектр. Экспериментальные закономерности линейчатого спектра водорода.

Спектральные серии. Несовместимость закономерностей излучения с классическим представлениями. Опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -частиц. Ядерная модель атома. Строение атома водорода. Теория Бора для атома водорода и водородоподобных атомов. Квантование энергии электрона в атоме. Энергетические уровни. Потенциалы возбуждения и ионизации. Ограниченность теории Бора. Квантовомеханическое описание водородоподобных атомов. Решение уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода. Собственные значения энергии и собственные волновые функции Электрона в атоме. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Пространственное квантование момента импульса и кратность вырождения уровней энергии. Распределение электронной плотности в атоме.

**6. Распределение электронов в атомах.** Спектры щелочных металлов. Дублетная структура спектров щелочных металлов и спин электрона. Полный момент импульса электрона в атоме. Спин-орбитальное взаимодействие. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по энергетическим состояниям. Электронные конфигурации. Последовательность заполнения электронных оболочек атомов. Правило Хунда. Периодическая система элементов.

**7. Излучение и поглощение электромагнитной энергии атомами.** Структура энергетических уровней электронов в сложных атомах. Атомные спектры. Спонтанное излучение электромагнитной энергии атомами. Мультиплетность энергетических уровней и спектров излучения. Правила отбора. Рентгеновское излучение. Изучение электронной структуры атомов методами оптической и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. Взаимодействие атома с электромагнитным полем. Эффект Зеемана. Эффект Штарка. Электронный парамагнитный резонанс. Вынужденное излучение электромагнитной энергии. Инверсная заселенность. Оптические квантовые генераторы.

**8. Элементы физики молекул.** Строение молекулы. Молекула водорода. Обменное взаимодействие. Физическая природа химической связи. Ионная и ковалентная связи. Энергетические состояния молекулы. Вращательное и колебательное движения двухатомных и многоатомных молекул. Вращательно-колебательные молекулярные спектры. Люминесценция.

**9. Строение кристаллов и тепловые свойства твердых тел.** Строение кристаллов. Типы связи в кристаллах. Ионная связь.

Ковалентная связь. Водородная связь. Металлическая связь. Молекулярная связь. Акустические и оптические колебания атомов кристаллической решетки. Фононы. Теплоемкость кристаллов при высоких и низких температурах. Фононная теория решеточной проводимости с применением статистики Бозе – Эйнштейна.

**10. Элементы зонной теории кристаллов.** Движение электронов в периодическом поле кристалла. Расщепление энергетических уровней атомов и образование энергетических зон кристалла. Число электронных состояний в зоне. Заполнение зон. Металлы. Диэлектрики. Полупроводники. Электронная и дырочная проводимости полупроводников. Собственные полупроводники. Примесные полупроводники. Динамика электронов в кристаллической решетке полупроводника. Эффективная масса. Уровень Ферми и электрическая проводимость полупроводников. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. Равновесные и неравновесные носители заряда в полупроводниках.

**11. Элементы квантовой теории свободных электронов в кристалле.** Носители тока в металлах. Вырожденный электронный газ в металле. Применение статистики Ферми – Дирака для описания распределения электронов проводимости металла по энергиям. Энергия Ферми. Влияние температуры на распределение электронов в металле. Электропроводность металлов. Электронная теплоемкость.

**12. Контактные явления.** Переходы и контакты. Контакт двух металлов. Контактная разность потенциалов. Термоэлектрические явления. Контакт металла и полупроводника и его выпрямляющее действие. Электронно-дырочный переход. Распределение электронов и дырок в *p-n*-переходе. Вольтамперная характеристика *p-n*-перехода. Транзистор. Применение полупроводников (интегральные схемы, солнечные батареи, светоиды, фотоэлементы, термисторы).

**13. Сверхпроводимость.** Явление сверхпроводимости. Критическая температура. Эффект Мейснера. Критическое магнитное поле. Сверхпроводники первого и второго рода. Квантовая природа сверхпроводимости. Куперовское спаривание электронов. Туннелирование электронов через диэлектрический слой. Эффекты Джозефсона. Сильная и слабая сверхпроводимости. Высокотемпературная сверхпроводимость.

**14. Жидкие кристаллы.** Типы жидких кристаллов: нематики, холестерики, смектики. Фазовые переходы в жидких кристаллах. Упругие свойства нематиков. Поведение жидких кристаллов в

электрическом и магнитном полях. Применение жидких кристаллов. Дисплеи на жидких кристаллах.

**15. Элементы физики атомного ядра.** Строение атомных ядер и их основные характеристики. Изобары. Изотопы. Дефект массы и энергия связи ядра. Ядерные силы. Модели атомного ядра. Мезонная теория ядерных сил. Ядерные реакции и их энергетический выход. Законы сохранения в ядерных реакциях. Цепная реакция. Распределение осколков деления ядер урана по массам. Термоядерные реакции. Атомная энергетика. Радиоактивность. Виды радиоактивного излучения. Особенности  $\alpha$ -распада,  $\beta$ -распада и  $\gamma$ -излучения. Закон радиоактивного распада. Постоянная радиоактивного распада, период полураспада и активность радиоизотопа. Радиоактивные ряды. Взаимодействие радиоактивного излучения и потока нейтронов с веществом.

**16. Элементы физики элементарных частиц.** Классификация элементарных частиц. Фотоны, лептоны и адроны. Типы взаимодействий. Понятие лептонного и барионного квантовых чисел, изоспина, странности и четности. Строгие и нестрогие законы сохранения и их связь с типами взаимодействий. Кварки. Классификация адронов на основе кварковой модели.

### 5.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения

#### *Тема 1. Фотометрия*

1. *Энергетический поток излучения  $\Phi_3$  (ватт (Вт)) равен количеству энергии, переносимой излучением в единицу времени через данную площадку. Световым потоком  $\Phi$  (люмен (лм)) называется поток излучения, оцениваемый по зрительному ощущению. Световой поток  $d\Phi(\lambda)$  для монохроматического света с длиной волны  $\lambda$  связан с энергетическим потоком  $d\Phi_3(\lambda)$  следующим соотношением:*

$$d\Phi(\lambda) = d\Phi_3(\lambda)V(\lambda)/A, \quad (5.1,a)$$

где  $V(\lambda)$  – *относительная спектральная чувствительность нормального глаза человека к свету с длиной волны  $\lambda$ ;  $A = 0,00146$  Вт/лм – механический эквивалент света.*

*Энергетическая сила света  $I_3$  (ватт на стерадиан (Вт/ср)) источника равна отношению энергетического потока излучения  $d\Phi_3$ ,*

излучаемого в данном направлении, к телесному углу  $d\Omega$ , в котором он распространяется. Сила света  $I$  (кандела (кд)) источника равна отношению светового потока  $d\Phi$ , излучаемого в данном направлении, к телесному углу  $d\Omega$ , в котором он распространяется:

$$I_s = d\Phi_s/d\Omega \quad \text{и} \quad I = d\Phi/d\Omega. \quad (5.1,б)$$

В случае точечного изотропного источника  $I_s = \Phi_s/(4\pi)$  и  $I = \Phi/(4\pi)$ .

2. Энергетическая освещенность  $E_s$  (ватт на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ )) равна отношению энергетического потока  $d\Phi_s$ , падающего на поверхность, к площади этой поверхности  $dS$ . Освещенность  $E$  (люкс (лк)) равна отношению светового потока  $d\Phi$ , падающего на поверхность, к площади этой поверхности  $dS$ :

$$E_s = d\Phi_s/dS \quad \text{и} \quad E = d\Phi/dS. \quad (5.2)$$

Энергетическая освещенность  $E_s$  и освещенность  $E$  поверхности, создаваемые точечным изотропным источником энергетической силой света  $I_s$  и силой света  $I$  в точке, удаленной от него на расстояние  $r$ , выражаются следующими формулами:

$$E_s = I_s \cos\alpha/r^2 \quad \text{и} \quad E = I \cos\alpha/r^2 - \text{закон обратных квадратов для } E_s \text{ и } E, \quad (5.3)$$

где  $\alpha$  – угол между лучом в точке падения и нормалью к поверхности.

4. Энергетическая светимость  $R_s$  (ватт на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ )) равна отношению энергетического потока  $d\Phi_s$ , испускаемого площадкой  $dS$  по всем направлениям (в телесном угле  $\Omega = 2\pi$ ) к величине этой площадки. Светимость  $R$  (люмен на квадратный метр ( $\text{лм}/\text{м}^2$ )) равна отношению светового потока  $d\Phi$ , испускаемого площадкой  $dS$  по всем направлениям, к величине этой площадки:

$$R_s = d\Phi_s/dS \quad \text{и} \quad R = d\Phi/dS. \quad (5.4)$$

Светимости поверхности  $R_s$  и  $R$  тела, обусловленные ее освещенностью

$$R_s = \rho E_s \quad \text{и} \quad R = \rho E, \quad \text{где } \rho - \text{коэффициент рассеяния (отражения)}.$$

5. Энергетическая яркость  $B_s$  (ватт на квадратный метр и на стерадиан ( $\text{Вт}/(\text{ср} \cdot \text{м}^2)$ )) светящейся поверхности в некотором направлении равна отношению энергетической силы света  $dI_s$  элементарной площадки  $dS$  в данном направлении к проекции площадки  $dS$  на плоскость, перпендикулярную этому направлению. Яркость  $B$  (кандела на квадратный метр ( $\text{кд}/\text{м}^2$ )) светящейся

поверхности в некотором направлении равна отношению силы света  $dI$  элементарной площадки  $dS$  в данном направлении к проекции площадки  $dS$  на плоскость, перпендикулярную этому направлению:

$$B_{\circ} = \frac{dI_{\circ}}{dS_{\perp}} = \frac{dI_{\circ}}{dS \cos \theta} \quad \text{и} \quad B = \frac{dI}{dS_{\perp}} = \frac{dI}{dS \cos \theta}. \quad (5.5)$$

6. Источники света, яркость  $B$  которых не зависит от направления, называются *ламбертовскими*. Для ламбертовского источника энергетическая светимость  $R_{\circ}$  (светимость  $R$ ) и энергетическая яркость  $B_{\circ}$  (яркость  $B$ ) связаны соотношениями

$$R_{\circ} = \pi B_{\circ} \quad \text{и} \quad R = \pi B. \quad (5.6)$$

## **Тема 2. Геометрическая оптика**

### **7. Законы отражения и преломления света:**

$$\alpha = \gamma, \quad \sin \alpha / \sin \beta = n_{21}; \quad n_{21} = n_2 / n_1 = v_1 / v_2, \quad (5.7)$$

где  $\alpha$  – угол падения;  $\gamma$  – угол отражения;  $\beta$  – угол преломления;  $n_1 = c/v_1$  и  $n_2 = c/v_2$  – абсолютные показатели преломления первой и второй среды;  $n_{21}$  – относительный показатель преломления второй среды относительно первой;  $v_1$  и  $v_2$  – скорость света в первой и второй средах.

Падающий, отраженный, преломленный лучи и перпендикуляр, восстановленный в точке падения на границе раздела сред, лежат в одной плоскости.

### **8. Формула сферического зеркала**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, \quad (5.8)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения соответственно;  $f$  – фокусное расстояние зеркала;  $R$  – радиус кривизны зеркала.

В формуле (5.8) все расстояния отсчитываются от полюса зеркала. Каждое из расстояний  $a, b, f, R$  берется со знаком «+» (плюс), если оно отсчитывается от направления распространения луча света и со знаком «–» (минус) – в противоположном случае.

9. *Оптическая сила  $D$  (диоптрия (дптр)) тонкой линзы* выражается через радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  ее поверхностей и абсолютные показатели преломления вещества линзы  $n_{\text{л}}$  и

окружающей линзу среды  $n_{\text{ср}}$  соотношением

$$D = \left( \frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{ср}}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}. \quad (5.9)$$

Формула тонкой линзы записывается так:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}, \quad (5.10)$$

где  $s$  и  $s'$  – расстояния от оптического центра линзы до предмета и до его изображения соответственно.

В формулах (5.9) и (5.10) все расстояния  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $s$ ,  $s'$ ,  $f$  отсчитываются от оптического центра линзы. *Правило знаков* то же, что и в формуле (5.8).

10. *Линейное увеличение*  $\Gamma$  в сферических зеркалах и линзах

$$\Gamma = H/h = s'/s, \quad (5.11)$$

где  $h$  и  $H$  – высоты предмета и его изображения соответственно.

11. *Угловое увеличение* лупы

$$\Gamma = L/f, \quad (5.12)$$

где  $L = 25$  см – расстояние наилучшего зрения;  $f$  – фокусное расстояние лупы.

### **Тема 3. Интерференция света**

12. Две световые волны, имеющие постоянную разность фаз в каждой точке среды, называются *когерентными*. Если две когерентные световые волны распространяются в средах с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  и проходят расстояния  $s_1$  и  $s_2$  соответственно, то между ними возникает дополнительная разность фаз:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 s_2 - n_1 s_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (5.13)$$

где  $L = n s$  – оптическая длина пути;  $\Delta$  – оптическая разность хода.

13. Результат *интерференции света* при наложении двух когерентных волн с одинаковыми начальными фазами зависит от значения  $\Delta$ . *Интерференционные максимумы и минимумы* с номером  $m$  для



интенсивности света  $I$  наблюдаются при выполнении следующих условий:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots) - \text{максимумы}; \quad (5.14)$$

$$\Delta = (2m-1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (m = 1, 2, \dots) - \text{минимумы}. \quad (5.15)$$

14. Расстояние  $\Delta x$  между *интерференционными полосами* (или шириной полосы) на экране, полученными от двух когерентных источников света

$$\Delta x = l\lambda/d, \quad (5.16)$$

где  $l$  – расстояние от экрана до источников;  $\lambda = \lambda_0/n$  – длина световой волны в среде, заполняющей пространство между источниками света и экраном;  $d$  – расстояние между источниками ( $d \ll l$ ).

15. Оптическая разность хода  $\Delta$  световых лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки (пленки), по обе стороны которой находится одна и та же среда, рассчитывается по формуле

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (5.17)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – абсолютные показатели преломления среды и вещества пластинки толщиной  $d$ ;  $\alpha$  – угол падения света;  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме; знак «+» (плюс) при  $n_1 > n_2$ , а знак «-» (минус) – при  $n_1 < n_2$ .

В проходящем через тонкую пластинку свете оптическая разность хода

$$\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} = 2d n_2 \cos \beta, \quad (5.18)$$

где  $\beta$  – угол преломления света.

16. Радиусы *темных колец Ньютона* при наблюдении в отраженном свете (или *светлых* – в проходящем) определяются формулой

$$r_m = \sqrt{mR\lambda} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (5.19)$$

а радиусы *светлых* в отраженном свете (или *темных* – в проходящем) – формулой

$$r_m = \sqrt{(2m-1)R\lambda/2} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (5.20)$$

где  $R$  – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной пластиной;  $\lambda$  – длина световой волны в среде между линзой и пластинкой ( $\lambda = \lambda_0/n$ );  $m$  – порядковый номер кольца.

#### **Тема 4. Дифракция света**

17. Радиус  $r_m$  внешней границы  $m$ -й зоны Френеля для сферической поверхности световой волны, испускаемой точечным изотропным источником  $S$ , определяется по формуле

$$r_m = \sqrt{m\lambda ab/(a+b)}, \quad (5.21)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояния от вершины волновой поверхности до источника  $S$  и точки  $P$ , для которой построены зоны Френеля, соответственно;  $\lambda$  – длина волны света, испускаемого источником  $S$ .

Для плоской поверхности световой волны радиус  $m$ -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{m\lambda b}. \quad (5.22)$$

18. В случае дифракции в параллельных лучах от узкой щели положения минимумов и максимумов освещенности на экране определяются углом  $\varphi$ , отсчитанным от нормали к плоскости щели:

$$b \sin\varphi = \pm m\lambda - \text{условие минимумов}; \quad (5.23)$$

$$b \sin\varphi = \pm (2m - 1)\lambda/2 - \text{условие максимумов}, \quad (5.24)$$

где  $b$  – ширина щели;  $m$  – порядок максимума (минимума) ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

19. При нормальном падении света на дифракционную решетку положение главных максимумов определяется формулой

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (5.25)$$

где  $d = 1/n$  – период решетки;  $n$  – число штрихов решетки на единицу длины;  $\varphi$  – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением распространения дифрагированных волн;  $m$  – порядок (номер) главного максимума.

20. Угловая дисперсия дифракционной решетки с периодом  $d$

$$D = d\varphi/d\lambda = m/(d \cos\varphi), \quad m - \text{порядок спектра}. \quad (5.26)$$

21. Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \lambda/\Delta\lambda = mN, \quad m - \text{порядок спектра}, N - \text{число штрихов}, \quad (5.27)$$

где  $\Delta\lambda$  – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий ( $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ ), при которой эти линии могут быть видны раздельно (разрешены) в спектре, полученном посредством данной решетки.

22. Условие *дифракционных максимумов* при дифракции рентгеновских лучей на *пространственной решетке* (кристалле)

$$2d \sin\theta = \pm m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots) - \text{условие Брэгга – Вульфа}, \quad (5.28)$$

где  $d$  – расстояние между атомными плоскостями кристалла;  $\theta$  – *угол скольжения*, т. е. угол между падающим лучом и поверхностью кристалла.

### **Тема 5. Поляризация света**

23. Луч, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, полностью поляризован (плоскополяризован), если угол падения  $\alpha_{\text{Бр}}$  удовлетворяет условию

$$\text{tg}\alpha_{\text{Бр}} = n_{21} - \text{закон Брюстера}, \quad (5.29)$$

где  $n_{21}$  – относительный показатель преломления.

24. Интенсивность  $I$  поляризованного света, прошедшего через поляризатор, пропорциональна квадрату косинуса угла  $\phi$  между плоскостью поляризации луча и плоскостью пропускания поляризатора:

$$I = I_0 \cos^2 \phi - \text{закон Малюса для линейно поляризованного света}, \quad (5.30)$$

где  $I_0$  – интенсивность падающего поляризованного света.

25. *Степень поляризации* света, полученного с помощью поляризатора

$$P = (I_{\text{max}} - I_{\text{min}}) / (I_{\text{max}} + I_{\text{min}}), \quad (5.31)$$

где  $I_{\text{max}}$  и  $I_{\text{min}}$  – максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям световых колебаний в луче.

26. *Угол поворота плоскости поляризации* света

$$\phi = \alpha l - \text{для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей}; \quad (5.32)$$

$$\phi = \alpha_0 c l - \text{для оптически активных растворов}, \quad (5.33)$$

где  $l$  – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;  $\alpha$  и  $\alpha_0$  – *постоянная вращения* чистого оптически активного вещества и *удельная постоянная вращения* раствора

соответственно;  $c$  – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

## **Тема 6. Тепловое излучение**

27. Закон Стефана – Больцмана для излучения абсолютно черного тела

$$R_3 = \sigma T^4, \quad (5.34)$$

где  $R_3$  – энергетическая светимость абсолютно черного тела;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана – Больцмана;  $T$  – абсолютная температура.

28. Излучение реального (серого) тела описывается соотношением

$$R_3^* = a_T \sigma T^4, \quad (5.35)$$

$a_T$  – коэффициент серости, или поглотительная способность реального тела.

29. Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b / T, \quad (5.36)$$

где  $\lambda_{\max}$  – длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, или испускательной способности  $r_{\lambda,T}$  излучения;  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К – постоянная Вина.

30. Максимальное значение испускательной способности абсолютно черного тела при заданной температуре определяется по формуле

$$r_{\lambda,T}^{\max} = CT^5, \quad (5.37)$$

где  $C = 1,29 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м<sup>3</sup>·К<sup>5</sup>).

Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела имеет вид ( $\lambda = c / \nu$ )

$$r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} \nu^2 / c, \quad r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (5.38)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $c$  – скорость света.

31. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + K_{\max} = A + \frac{m\nu_{\max}^2}{2}, \quad (5.39)$$

где  $h\nu$  – энергия фотона, падающего на поверхность металла;  $A$  – работа выхода электрона;  $K_{\max}$  – максимальная кинетическая энергия выбитого электрона.

*Красная граница фотоэффекта*

$$\nu_0 = A/h, \text{ или } \lambda_0 = hc/A, \quad (5.40)$$

где  $\nu_0$  – минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект;  $\lambda_0$  – максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект;  $c$  – скорость света.

32. *Формула Комптона* для рассеяния фотона на свободном электроны вещества

$$\Delta\lambda = \lambda^* - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (5.41)$$

где  $\lambda$  – длина волны фотона, взаимодействующего со свободным электроном вещества;  $\lambda^*$  – длина волны фотона, рассеянного на угол  $\theta$  после взаимодействия;  $m_0$  – масса покоя электрона;  $\lambda_0 = h/(m_0c) = 2,43 \cdot 10^{-12}$  м – *длина волны Комптона*.

33. *Давление света* при нормальном падении на поверхность

$$p = E_3(1 + \rho)/c = w(1 + \rho), \quad (5.42)$$

где  $E_3$  – энергетическая освещенность;  $w$  – объемная плотность энергии излучения;  $\rho$  – *коэффициент отражения*.

## ***Тема 7. Элементы квантовой физики атомов и молекул***

34. *Первый постулат Бора*: электроны в атоме могут двигаться только по определенным стационарным орбитам, не излучая энергию. Для таких орбит момент импульса  $L$  электрона равен целому кратному  $\hbar = h/2\pi$ , т. е. квантуется:

$$L = m\nu_n r_n = n\hbar, \quad (5.43)$$

где  $r_n$  – радиус  $n$ -й орбиты;  $\nu_n$  – скорость электрона на этой орбите;  $n$  – целое число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

35. *Второй постулат Бора*: при переходе электрона с одной орбиты на другую атом излучает или поглощает квант энергии, равный

$$h\nu_{mn} = E_n - E_m, \quad (5.44)$$

где  $\nu_{mn}$  – частота излученного или поглощенного кванта;  $E_n$  и  $E_m$  – энергии электрона на соответствующих орбитах.

36. Решая совместно боровское условие квантования орбит (5.43) с уравнением второго закона Ньютона для электрона, движущегося по окружности под действием кулоновской силы

$$\frac{m\nu_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2},$$

получаем радиусы  $r_n$  стационарных орбит электронов в водородоподобных ионах:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{mZe^2}, \quad (5.45)$$

где  $z$  – порядковый номер элемента.

В частности, радиус первой боровской орбиты (*первый боровский радиус*)

$$r_1 = a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (5.46)$$

37. Полная энергия электрона в атоме состоит из кинетической и потенциальной энергий:

$$K = \frac{m\nu^2}{2}; \quad U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.47)$$

Поэтому полная энергия электрона в водородоподобном ионе на  $n$ -й орбите

$$E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}. \quad (5.48)$$

38. *Формула Бальмера – Ритца* (обобщенная формула Бальмера) для частот волн линий спектра водородоподобного иона

$$\nu_{m,n} = Z^2 R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (5.49)$$

где  $n$  и  $m$  – целые числа ( $m > n$ ).

Число  $n$  определяет серию,  $m$  – отдельную линию этой серии. Величина  $R = me^4 / (8\epsilon_0^2 h^3) = 3,29 \cdot 10^{15}$  Гц называется *постоянной Ридберга*.

39. Частоты характеристического рентгеновского излучения определяются *законом Мозли*:

$$\sqrt{\nu} = C(Z - b), \quad (5.50)$$

где  $C = \sqrt{R(1/n^2 - 1/m^2)}$ ;  $b$  – постоянная экранирования, зависящая сильно от номера серии (числа  $n$ ) и слабо от номера линии данной серии (числа  $m$ ).

### **Тема 8. Элементы физики атомного ядра**

40. Атомное ядро обозначается символом  ${}_Z^A X$ , где  $X$  – символ химического элемента;  $Z$  – *зарядовое число*, т. е. число протонов в ядре;  $A$  – *массовое число*, т. е. число нуклонов в ядре.

41. Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = c^2[Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}] = c^2[Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m], \quad (5.51)$$

где  $\Delta m$  – дефект массы ядра, равный размеру суммарной массы покоя нуклонов ядра и массы самого ядра;  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  – соответственно массы покоя протона, нейтрона и ядра;  $m_{\text{H}}$  и  $m$  – соответственно массы атомов водорода и атома, энергия связи которого вычисляется по формуле (5.51).

*Удельная энергия связи*, т. е. энергия связи, отнесенная к одному нуклону

$$\delta E_{\text{св}} = E_{\text{св}} / A. \quad (5.52)$$

42. *Закон радиоактивного распада*

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (5.53)$$

где  $N_0$  – число радиоактивных ядер в начальный момент времени ( $t = 0$ );  $N$  – число нераспавшихся ядер в данный момент времени  $t$ ;  $\lambda$  – *постоянная радиоактивного распада*.

Из (5.53) следует, что число ядер, распавшихся за время  $t$ , равно

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (5.54)$$

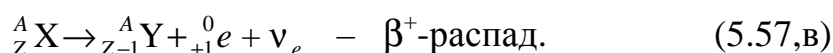
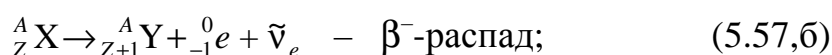
43. *Период полураспада*  $T_{1/2}$  и *среднее время жизни*  $\tau$  радиоактивного ядра связаны с постоянной радиоактивного распада  $\lambda$  следующими соотношениями:

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda; \quad \tau = 1/\lambda. \quad (5.55)$$

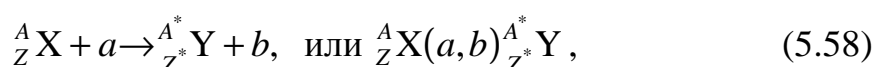
44. Активность радиоактивного препарата

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \quad (5.56)$$

45. Схемы радиоактивных распадов:



46. Символическая запись ядерной реакции



где  ${}_Z^A X$ ,  ${}_Z^{A*} Y$  – исходное и конечное ядра соответственно;  $a$  и  $b$  – соответственно бомбардирующая и испускаемая частицы (или ядра).

47. Энергия ядерной реакции

$$W = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)], \quad (5.59)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы покоя ядра – мишени и бомбардирующей частицы;  $(m_3 + m_4)$  – сумма масс покоя всех ядер продуктов реакции.

## 5.4. Примеры решения задач

**Пример 1. Элементы фотометрии.** Люминесцентная цилиндрическая лампа диаметром  $d = 2,5$  см и длиной  $l = 40$  см создает освещенность  $E = 1$  лк в точке на прямой, перпендикулярной к оси лампы и проходящей через ее середину, на расстоянии  $r = 5$  м от центра лампы. Принимая лампу за ламбертовский источник, определить для указанного направления силу света, яркость, а также светимость этой лампы.

*Дано:*

$$E = 1 \text{ лк};$$

$$r = 5 \text{ м};$$

$$d = 0,025 \text{ м};$$

$$l = 0,4 \text{ м}$$

*Найти:  $I$ ;  $B$ ;  $R$*

*Решение.* Наибольший размер лампы, т. е. ее длина  $l$  на порядок меньше расстояния  $r$ , на котором измерена освещенность  $E$ . Следовательно, для вычисления силы света  $I$  в заданном направлении можно принять лампу за точечный источник и применить формулу (5.3) при  $\alpha = 0^\circ$ :

$$E = I / r^2 \Rightarrow I = E r^2. \quad (1)$$



Подставив числовые данные, получим  $I = 1 \cdot 5^2 = 25$  кд.

Для вычисления яркости  $B$  применим формулу (5.5), записав ее по отношению к площади проекции протяженного источника на плоскость, перпендикулярную по направлению к наблюдателю:

$$B = dI / dS_{\perp} \Rightarrow B = I / S_{\perp}. \quad (2)$$

Так как лампа цилиндрическая, то эта проекция имеет форму прямоугольника длиной  $l$  и шириной  $d$ . Следовательно,  $S_{\perp} = ld$ , а

$$B = I / ld. \quad (3)$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$B = 25 / (0,4 \cdot 0,025) = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кд/м}^2.$$

Поскольку по условию люминесцентная лампа является ламбертовским источником, то ее светимость рассчитываем по формуле (5.6):

$$R = \pi B = 3,14 \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 7,9 \cdot 10^3 \text{ лк.}$$

### Пример 2. Законы отражения и преломления света.

Монохроматический луч падает под углом  $\alpha_1 = 60^\circ$  на боковую поверхность стеклянной равнобедренной призмы (рис. 52). У вершины  $B$  призмы угол  $\varphi = 40^\circ$ . На какой угол  $\delta$  развернется луч, вышедший из призмы, если показатель преломления призмы  $n = 1,7$ ?

Дано:  
 $\alpha_1 = 60^\circ$ ;  
 $\varphi = 40^\circ$ ;  
 $n = 1,7$

Найти:  $\delta$

*Решение.* Из рассмотрения треугольников  $DEM$  и  $DEN$  следует, что

$$\alpha_2 = \varphi - \beta_1, \quad \delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2). \quad (1)$$

Подставив  $\alpha_2$  в выражения для  $\delta$ , получим, что

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \varphi \Rightarrow \beta_2 = \varphi + \delta - \alpha_1. \quad (2)$$

Запишем закон преломления света (5.7) первой грани:

$$\sin \alpha_1 / \sin \beta_1 = n. \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что

$$\sin \beta_1 = \sin \alpha_1 / n = \sin 60^\circ / 1,7 = 0,509 \Rightarrow \beta_1 \approx 30,6^\circ.$$

Запишем закон преломления света (5.7) для второй грани:

$$\sin \alpha_2 / \sin \beta_2 = 1/n. \quad (4)$$

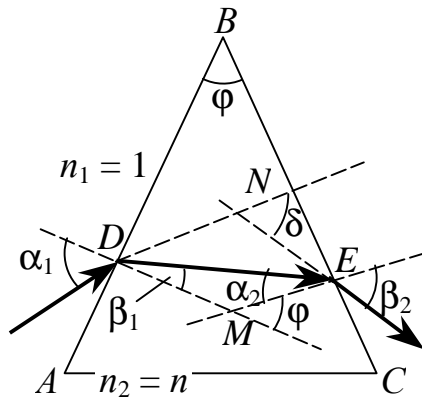


Рис. 52

Подставляя в формулу (4)  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  соответственно из выражений (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \beta_1) / \sin(\varphi + \delta - \alpha_1) &= 1/n \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(\varphi + \delta - \alpha_1) &= n \sin(\varphi - \beta_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим числовые значения в формулу (5) и выполним расчеты:

$$\begin{aligned} \sin(40^\circ + \delta - 60^\circ) &= 1,54 \cdot \sin(40^\circ - \\ - 30,6^\circ) &\Rightarrow \sin(\delta - 20^\circ) = 0,251 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta - 20^\circ &= 14,6^\circ \Rightarrow \delta = 34,6^\circ. \end{aligned}$$

**Пример 3. Интерференция света в тонких пленках.** На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм. Число интерференционных полос, приходящихся на участок клина длиной  $l = 1$  см, равно 10 (рис. 53). Определить преломляющий угол клина  $\gamma$ .

*Дано:*  
 $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  Кл;  
 $n = 1,5$ ;  
 $l = 0,01$  м;  
 $N = 10$   
*Найти:*  $\gamma$

*Решение.* Параллельный пучок лучей, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти лучи когерентны, и поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы наблюдаются только при малых углах клина, то отраженные лучи 1 и 2 (рис. 53) оказываются практически параллельными.

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей кратна нечетному числу полуволен (формула (5.15)):

$$\Delta = (2m - 1)\lambda/2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Найдем оптическую разность хода лучей 1 и 2 в точке A клина:

$$\Delta = L_2 - L_1 = 2d_m n - \lambda/2, \quad (2)$$

где  $L_2 = 2d_m n$  и  $L_1 = 0 + \lambda/2$  – оптические длины пути для второго и первого лучей соответственно;  $d_m$  – толщина клина в точке A, соответствующей темной полосе с номером  $m$ .

выводится из формулы (5.15) при  $\alpha = 0$ ).

Для в формулу (1) выражение для разности  $\Delta$ , получим

$$2d_m n - \lambda/2 = (2m-1)\lambda/2 \Rightarrow d_m = m\lambda/2n. \quad (3)$$
$$\operatorname{tg} \gamma = (d_{m+10} - d_m)/l. \quad (4)$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \left( \frac{m+10}{2n} \lambda - \frac{m}{2n} \lambda \right) / l = \frac{5\lambda}{nl}.$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 0,01} = 2 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \gamma \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 41,3 \text{ угл. сек.}$$

181

Дано:  
 $d = 2,2 \cdot 10^{-6}$  м;  
 $\Delta\varphi = 15^\circ$   
 Найти:  $\lambda$

Решение. Пусть  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – углы дифракции, соответствующие максимумам первого ( $m = 1$ ) и второго ( $m = 2$ ) порядков. По условию задачи (рис. 54)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi. \quad (1)$$

Из формулы (5.25) для главных максимумов дифракционной решетки следует, что

$$d \sin \varphi_1 = \lambda, \quad d \sin \varphi_2 = 2\lambda. \quad (2)$$

Разделив второе уравнение на первое и учитывая соотношение (1), получим

$$\sin (\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1. \quad (3)$$

Решим тригонометрическое уравнение (3):

$$\begin{aligned} \sin (\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1 &\Rightarrow \sin \varphi_1 \cos \Delta\varphi + \cos \varphi_1 \sin \Delta\varphi = 2 \sin \varphi_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1} = \sin \varphi_1 (2 - \cos \Delta\varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin^2 \Delta\varphi (1 - \sin^2 \varphi_1) = \sin^2 \varphi_1 (2 - \cos \Delta\varphi)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin^2 \varphi_1 [(2 - \cos \Delta\varphi)^2 + \sin^2 \Delta\varphi] = \sin^2 \Delta\varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi_1 [4 - 4 \cos \varphi + \\ &+ \cos^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi] = \sin^2 \Delta\varphi \Rightarrow \sin^2 \varphi_1 [5 - 4 \cos \Delta\varphi] = \sin^2 \Delta\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \varphi_1 = \sin \Delta\varphi / \sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

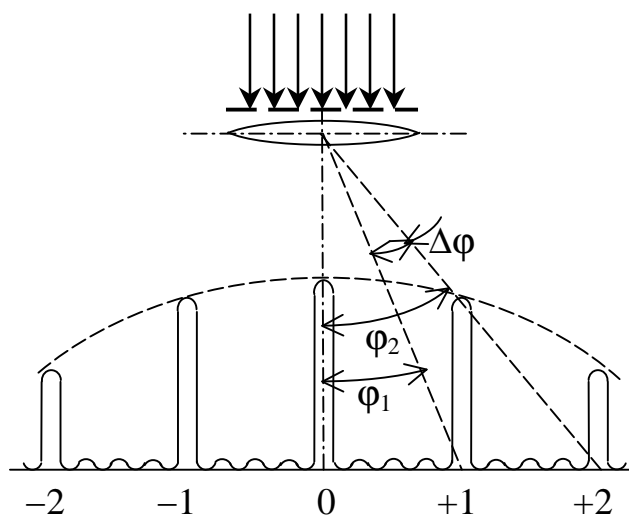


Рис. 54

Первое из уравнений (2) с учетом выражения (4) позволяет определить длину волны:

$$\lambda = d \sin \varphi_1 = \frac{d \sin \Delta \varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta \varphi}}. \quad (5)$$

Подставив в выражение (5) числовые значения величин ( $\sin \Delta \varphi = 0,259$ ;  $\cos \Delta \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \Delta \varphi} = 0,966$ ), получаем

$$\lambda = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,259 / \sqrt{5 - 4 \cdot 0,966} = 0,54 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,54 \text{ мкм}.$$

**Пример 5. Степень поляризации света.** На пути частично поляризованного пучка света поместили призму Николя (*николь*). При повороте николя на угол  $\varphi = 60^\circ$  из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность  $I$  прошедшего света уменьшилась в  $\eta = 3,0$  раза. Найдите степень поляризации  $P$  падающего на николь света.

*Дано:*

$$\eta = 3;$$

$$\varphi = 60^\circ;$$

$$I_{\max} = \eta \cdot I$$

*Найти:  $P$*

*Решение.* Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николь пропускает половину интенсивности падающего на него естественного света, превращая его в плоскополяризованный ( $I_1 = 0,5I_0^{\text{ест}}$ ).

Интенсивность прошедшего поляризованного света зависит, согласно закону Малюса (5.30), от взаимной ориентации плоскости пропускания призмы Николя и плоскости поляризации падающего света ( $I_2 = I_0^{\text{пол}} \cos^2 \varphi$ ). Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николь, равна их сумме:

$$I = I_1 + I_2 = 0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}} \cos^2 \varphi. \quad (1)$$

При максимальном пропускании света угол  $\varphi = 0$ , поэтому

$$I_{\max} = 0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}}, \quad (2)$$

а при минимальном пропускании света угол  $\varphi = \pi/2$ , поэтому

$$I_{\min} = 0,5I_0^{\text{ест}}. \quad (3)$$

По условию,  $I_{\max} = \eta I$ , тогда, с учетом формул (1), (2), получим

$$0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}} = \eta(0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}} \cos^2 \varphi). \quad (4)$$

С помощью уравнения (4) устанавливаем связь между  $I_0^{\text{пол}}$  и  $I_0^{\text{ест}}$ :

$$\begin{aligned} I_0^{\text{пол}} &= 0,5 I_0^{\text{ест}} (\eta - 1) / (1 - \eta \cos^2 \varphi) = \\ &= 0,5 I_0^{\text{ест}} (3 - 1) / (1 - 3 \cos^2 60^\circ) = 4 I_0^{\text{ест}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Степень поляризации рассчитываем по формуле (5.31) с учетом выражений (2) и (3):

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}} - 0,5I_0^{\text{ест}}}{0,5I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{пол}} + 0,5I_0^{\text{ест}}} = \frac{I_0^{\text{пол}}}{I_0^{\text{пол}} + I_0^{\text{ест}}}. \quad (6)$$

Подставив в формулу (6) соотношение (5), получаем

$$P = 4 I_0^{\text{ест}} / (4 I_0^{\text{ест}} + I_0^{\text{ест}}) = 4/5 = 0,8.$$

**Пример 6. Тепловое излучение.** Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током силой  $I_1 = 1$  А до температуры  $T_1 = 1000$  К.

Определить, при какой силе тока нить накаляется до температуры  $T_2 = 3000$  К. Поглощательные способности вольфрама и его удельные сопротивления, соответствующие температурам  $T_1$  и  $T_2$ , равны:  $a_{T_1} = 0,115$ ;  $a_{T_2} = 0,334$ ;  $\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м;  $\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8}$  Ом·м.

*Дано:*

$$I_1 = 1 \text{ А};$$

$$T_1 = 1000 \text{ К};$$

$$T_2 = 3000 \text{ К};$$

$$a_{T_1} = 0,115;$$

$$a_{T_2} = 0,334;$$

$$\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом·м};$$

$$\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом·м}$$

*Найти:*  $I_2$

*Решение.* При установившейся температуре мощность  $P$ , потребляемая вольфрамовой нитью от источника, равна энергетическому потоку  $\Phi_3$  излучения, испускаемого нитью:

$$P = \Phi_3, \quad (1)$$

Выразим мощность  $P$  через величины  $I$ ,  $\rho$  с помощью формул (3.35, б), (3.31):

$$P = I^2 R = I^2 \rho l / S. \quad (2)$$

Энергетический поток  $\Phi_3$ , учитывая выражение (5.35) для энергетической светимости  $R_3^*$ , определим из формулы (5.2):

$$\Phi_3 = R_3^* S = a_T \sigma T^4 S. \quad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$I^2 \rho l = a_T \sigma T^4 S^2.$$

Применим это уравнение для нити при температурах  $T_1$  и  $T_2$ :

$$I_1^2 \rho_1 l = a_{T_1} \sigma T_1^4 S^2, \quad I_2^2 \rho_2 l = a_{T_2} \sigma T_2^4 S^2.$$

Разделив эти два уравнения друг на друга и выразив  $I_2$ , получим

$$I_2 = I_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \sqrt{\frac{a_{T_2} \rho_1}{a_{T_1} \rho_2}}. \quad (4)$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$I_2 = 1 \cdot \left( \frac{3000}{1000} \right)^2 \sqrt{\frac{0,334 \cdot 25,7 \cdot 10^{-8}}{0,115 \cdot 96,2 \cdot 10^{-8}}} = 7,9 \text{ А.}$$

**Пример 7. Фотоэффект.** Какую разность потенциалов  $U_{\text{зап}}$  запирающего электрического поля надо приложить к электродам вакуумного фотоэлемента, чтобы полностью затормозить фотоэлектроны, вылетающие из катода при освещении его лучами с длиной волны  $\lambda = 200 \text{ нм}$ , если работа выхода электрона из металла  $A = 4 \text{ эВ}$ ?

*Дано:*  
 $A = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$   
 $\lambda = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м};$   
 $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с};$   
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$   
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

*Найти:*  $U_{\text{зап}}$

*Решение.* Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (5.39) в виде  $(\nu = c/\lambda)$ :

$$hc/\lambda = A + m v_{\text{max}}^2 / 2. \quad (1)$$

Чтобы фотоэлектроны, вылетающие из катода, не достигли анода вакуумного элемента, между катодом и анодом надо приложить разность потенциалов  $U_{\text{зап}}$ , при которой работа  $A$ , совершаемая электрическим полем по торможению электрона, равна начальной кинетической энергии электрона:

$$eU_{\text{зап}} = m v_{\text{max}}^2 / 2. \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим

$$\frac{hc}{\lambda} = A + eU_{\text{зап}} \Rightarrow U_{\text{зап}} = \frac{hc/\lambda - A}{e}. \quad (3)$$

Проверяя единицы измерения левой и правой частей формулы (3), учтем, что выражение  $hc/\lambda = h\nu$  имеет размерность энергии:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/1 Кл} = 1 \text{ В}.$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты:

$$U_{\text{зап}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 2 \cdot 10^{-7} - 6,4 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,2 \text{ В}.$$

**Пример 8. Эффект Комптона.** Фотон с энергией  $E = 0,75 \text{ МэВ}$  рассеялся на свободном электроны вещества (мишени) под углом  $\theta = 60^\circ$ . Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить энергию  $E^*$  рассеянного фотона, кинетическую энергию  $K$  электрона отдачи и направление его движения.

*Дано:*

$$E = 0,75 \text{ МэВ};$$

$$\theta = 60^\circ; K_0 = 0;$$

$$p_0 = 0$$

*Найти:*  $E^*$ ;  $K$ ;  $\varphi$

*Решение.* Энергию рассеянного фотона найдем, используя формулу Комптона (5.41):

$$\lambda^* - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Выразив длины волн через энергии фотонов ( $E = hc/\lambda$ ), получим

$$\frac{hc}{E^*} - \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на  $hc$  и выразим энергию  $E^*$ :

$$\frac{1}{E^*} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos \theta}{m_0 c^2} \Rightarrow E^* = \frac{E}{E(1 - \cos \theta)/E_0 + 1}. \quad (3)$$

Подставим числовые значения в формулу (3) и выполним расчеты ( $E_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$  – энергия покоя электрона):

$$E^* = \frac{0,75}{0,75(1 - \cos 60^\circ)/0,51 + 1} = 0,43 \text{ МэВ}.$$

Кинетическая энергия электрона отдачи, как это следует из закона сохранения энергии системы электрон – фотон, равна разности энергий падающего и рассеянного фотона ( $K_0 = 0$ ):

$$K_0 + E = K + E^* \Rightarrow K = E - E^* = 0,75 - 0,43 = 0,32 \text{ МэВ}.$$



Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса:

$$\vec{p} + \vec{p}_0 = \vec{p}^* + m\vec{v}. \quad (4)$$

Поскольку импульс  $p_0 = 0$ , то из уравнения (4) следует, что импульс  $\vec{p}$  падающего фотона равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона ( $\vec{p}^*$ ) и электрона отдачи ( $m\vec{v}$ ):

$$\vec{p} = \vec{p}^* + m\vec{v}. \quad (5)$$

Векторная диаграмма уравнения (5) изображена на рис. 55. Угол  $\varphi$  определяет направление движения электрона отдачи. Из треугольника  $OCD$  находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CD}{OD} = \frac{CA \sin \theta}{OA - CA \cos \theta} = \frac{p^* \sin \theta}{p - p^* \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{p/p^* - \cos \theta}.$$

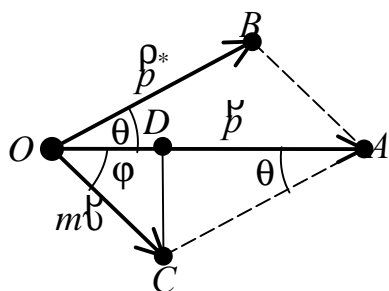


Рис. 55

Поскольку импульс фотона связан с его энергией ( $p = E/c$  и  $p^* = E^*/c$ ), то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{E/E^* - \cos \theta}. \quad (4)$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin 60^\circ}{0,75/0,43 - \cos 60^\circ} = 0,696 \Rightarrow \quad (5)$$

$$\Rightarrow \varphi = 34,84^\circ.$$

**Пример 9. Давление света.** Накаленная нить проходит по оси цилиндра длиной  $L = 10$  см и радиусом  $R = 5$  см. Нить излучает энергетический поток мощностью  $P = 600$  Вт. Учитывая, что световой поток распространяется симметрично относительно нити накала, определить давление света на поверхность цилиндра. Коэффициент отражения материала цилиндра  $\rho = 10\%$ .

Дано:

$L = 0,1$  м;  
 $R = 0,05$  м;  
 $P = 600$  Вт;  
 $\rho = 0,1$

Найти:  $p$

**Решение.** Световое давление  $p$  при нормальном падении на поверхность определяется формулой (5.42):

$$p = E_3(\rho + 1)/c. \quad (1)$$

Энергетическая освещенность  $E_3$  численно равна энергии, падающей на единицу площади поверхности в

единицу времени:

$$E_3 = W/(St) = P/S. \quad (2)$$

Площадь поверхности цилиндра

$$S = 2\pi RL. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1), получаем

$$p = \frac{P}{2\pi RLc}(\rho + 1). \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей расчетной формулы (4):

$$1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Вт}}{1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м/с}} = \frac{1 \text{ Дж/с}}{1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м/с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ м}^3} = 1 \text{ Па}.$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$p = \frac{600}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,05 \cdot 0,1 \cdot 3 \cdot 10^8} (0,1 + 1) = 70,1 \text{ мкПа}.$$

**Пример 10. Атом водорода.** Вычислить полную энергию  $E$ , линейную скорость  $v$  и период  $T$  обращения электрона, находящегося на первой ( $n = 1$ ) боровской орбите атома водорода.

*Дано:*

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с};$$

$$n = 1;$$

$$Z = 1;$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл};$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

*Найти:*  $E$

*Решение.* Полную энергию электрона в атоме водорода на первой орбите определим по формуле (5.45):

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (1)$$

Подставим числовые значения в формулу (1) и выполним расчеты:

$$E_1 = -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,62 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 1^2} = -2,2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Для определения линейной скорости  $v_n$  электрона на орбите воспользуемся формулой (5.47) для радиуса  $r_n$  орбиты:

$$r_n = 4\pi\epsilon_0\eta^2n^2/(mZe^2). \quad (2)$$

Согласно первому постулату Бора, электроны в атоме могут двигаться только по определенным стационарным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению (5.43):

$$m v_n r_n = n \hbar \Rightarrow v_n = n \hbar / (m r_n). \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), получим

$$v_n = \frac{n \eta}{m} \frac{m Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 \eta^2 n^2} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 \eta n}. \quad (4)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей расчетной формулы (4):

$$1 \text{ м/с} = \frac{1 \text{ Кл}^2}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}} = \frac{1 \text{ Кл}^2}{1 \text{ Кл}/(\text{В} \cdot \text{м}) \cdot 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}} = 1 \text{ м/с}.$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$v_1 = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Период  $T_n$  обращения электрона по орбите с номером  $n$

$$T_n = 2 \pi r_n / v_n. \quad (5)$$

Подставляя выражения (2) и (4) в формулу (5), получим

$$T_n = \frac{2 \pi \cdot 4 \pi \epsilon_0 \eta^2 n^2 \cdot 4 \pi \epsilon_0 \eta n}{m Z e^2 \cdot Z e^2} = \frac{32 \pi^3 \epsilon_0^2 \eta^3 n^3}{Z^2 e^4 m}. \quad (6)$$

Проверим единицы измерения левой и правой частей расчетной формулы (6):

$$1 \text{ с} = \frac{1 \text{ Ф}^2/\text{м}^2 \cdot 1 \text{ Дж}^3 \cdot \text{с}^3}{1 \cdot \text{Кл}^4 \cdot 1 \text{ кг}} = \frac{1 \text{ Кл}^2/(\text{В}^2 \cdot \text{м}^2) \cdot 1 \text{ Дж}^3 \cdot \text{с}^3}{1 \cdot \text{Кл}^4 \cdot 1 \text{ кг}} = 1 \text{ с}.$$

Подставим числовые значения в формулу (6) и выполним расчеты:

$$T_n = \frac{32 \cdot 3,14^3 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 1^3}{(1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}.$$

**Пример 11. Ядерные реакции.** Найти энергию, выделяющуюся при ядерной реакции  ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^3_1\text{H}$ .

<i>Дано:</i>	<i>Решение.</i>	Энергию,
$m({}_1^2\text{H}) = 2,01\,410 \text{ а. е. м.};$	выделяющуюся при ядерной реакции,	найдем по формуле (5.59):
$m({}_1^1\text{H}) = 1,00\,783 \text{ а. е. м.};$		$W = c^2 \Delta m, \quad (1)$
$m({}_1^3\text{H}) = 3,01\,605 \text{ а. е. м.}$	где $\Delta m = [2m({}_1^2\text{H}) - (m({}_1^1\text{H}) + m({}_1^3\text{H}))]$ – раз-	
<i>Найти:</i> $W$	ность масс частиц до и после реакции.	

Если первая сумма превышает вторую, то реакция идет с выделением энергии (экзотермическая реакция), а если сумма масс частиц после реакции превышает сумму масс частиц до реакции, то она идет с поглощением энергии (эндотермическая реакция).

Установим связь между 1 а. е. м. и эквивалентной ей энергией в МэВ. Так как  $1 \text{ а. е. м.} = 1,660\,566 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , а скорость света  $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ , то энергию  $\Delta E$ , соответствующую массе  $\Delta m = 1 \text{ а. е. м.}$ , определяем по формуле  $\Delta E = \Delta m c^2 = 1,660\,566 \cdot 10^{-27} \cdot (2,9979 \cdot 10^8)^2 = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ Дж}$ . Разделив полученное значение на энергию одного электрон-вольта ( $1 \text{ эВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ), получим энергетический эквивалент атомной единицы массы:  $(1,49 \cdot 10^{-10} / 1,602 \cdot 10^{-9} = 931,5 \text{ МэВ})$ .

Теперь формулу (1) можно переписать в следующем виде:

$$W = 931,5 \Delta m \text{ (МэВ)}. \quad (2)$$

Подставим числовые значения в формулу (2) и выполним расчеты:

$$W = 931,5[2 \cdot 2,01\,410 - (1,00\,783 + 3,01\,605)] = 4,02 \text{ МэВ}.$$

**Пример 12. Радиоактивность.** Определить активность  $a$  радиоактивного препарата радия массой  $m = 1 \text{ г}$ . Для  ${}^{226}\text{Ra}$  период полураспада  $T_{1/2} = 1\,590 \text{ лет}$ .

<i>Дано:</i>	<i>Решение.</i> Учитывая соотношение (5.57)
$m({}^{226}\text{Ra}) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг};$	для периода полураспада ( $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ ),
$T_{1/2} = 5,01 \cdot 10^{10} \text{ с}$	определим активность радиоактивного
<i>Найти:</i> $a$	препарата по формуле (5.56):

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N = \frac{\ln 2 \, N}{T_{1/2}}. \quad (1)$$

Число  $N$  радиоактивных ядер равно числу атомов радия в препарате массой  $m$ :

$$N = mN_A / M, \quad (2)$$

где  $N_A$  – постоянная Авогадро;  $M$  – молярная масса радия.

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получим

$$a = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A. \quad (3)$$

Подставим числовые значения в формулу (4) и выполним расчеты:

$$a = \frac{0,693}{5,01 \cdot 10^{10}} \frac{1 \cdot 10^{-3}}{226 \cdot 10^{-3}} 6,022 \cdot 10^{23} = 3,68 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

### 5.5. Задачи к контрольной работе № 5

**Таблица вариантов заданий  
для студентов инженерно-технических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	91
2	2	12	22	32	42	52	63	92
3	3	13	23	33	43	53	65	93
4	4	14	24	34	44	54	67	94
5	5	15	25	35	45	55	69	95
6	6	16	26	36	46	56	71	96
7	7	17	27	37	47	57	73	97
8	8	18	28	38	48	58	75	98
9	9	19	29	39	49	59	77	99
0	10	20	30	40	50	60	79	100

**Таблица вариантов заданий  
для студентов химико-технологических специальностей**

Вариант	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	62	81
2	2	12	22	32	42	52	64	82
3	3	13	23	33	43	53	66	83
4	4	14	24	34	44	54	68	84
5	5	15	25	35	45	55	70	85
6	6	16	26	36	46	56	72	86
7	7	17	27	37	47	57	74	87

8	8	18	28	38	48	58	76	88
9	9	19	29	39	49	59	78	89
0	10	20	30	40	50	60	80	90

### Тема 1. Фотометрия

1. Лампа, подвешенная к потолку, дает в горизонтальном направлении силу света  $I = 60$  кд. Какой световой поток  $\Phi$  падает на картину площадью  $S = 0,5 \text{ м}^2$ , висящую вертикально на стене на расстоянии  $r = 2$  м от лампы, если на противоположной стене находится большое зеркало на расстоянии  $a = 2$  м от лампы?

2. На какой высоте  $h$  над центром круглого стола радиусом  $R = 1,5$  м нужно повесить лампочку, чтобы освещенность на краю стола была максимальной?

3. Определите световой поток, падающий на круглую площадку радиусом  $R = 30$  см, удаленную на  $l_0 = 40$  см от точечного источника, лежащего на нормали, восстановленной из центра площадки. Сила света источника  $I = 30$  кд.

4. На какой высоте  $h$  нужно повесить лампочку силой света  $I = 10$  кд над листом белой бумаги, чтобы его яркость  $B$  была равна  $1 \text{ кд/м}^2$ , если коэффициент отражения  $\rho$  бумаги равен  $0,8$ ?

5. Лампа силой света в  $I = 200$  кд находится на расстоянии  $r = 2$  м от лежащей на столе книги. Освещенность книги  $E = 25$  лк. Определите, под каким углом  $\alpha$  падает свет на книгу, и на какой высоте  $h$  подвешена лампа над столом.

6. На лист белой бумаги площадью  $S = 20 \times 30 \text{ см}^2$  перпендикулярно к поверхности падает световой поток  $\Phi = 120$  лм. Найдите освещенность  $E$ , светимость  $R$  и яркость  $B$  бумажного листа, если коэффициент отражения  $\rho = 0,75$ .

7. Во сколько раз в Минске освещенность поверхности Земли 22 декабря меньше, чем 22 июня? Высота Солнца над Землей 22 июня  $59^\circ 37'$ , а 22 декабря  $12^\circ 43'$ .

8. В центре квадратной комнаты площадью  $S = 25 \text{ м}^2$  висит лампа. На какой высоте  $h$  от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

9. Лампочка, потребляющая мощность  $P_1 = 75$  Вт, создает на расстоянии  $r = 3$  м при нормальном падении лучей освещенность  $E = 8$  лк. Определите удельную мощность  $P$  лампочки (в ваттах на канделу) и световую отдачу  $\eta$  лампочки (в люменах на ватт).

10. Найдите освещенность  $E$  на поверхности Земли, вызываемую нормально падающими солнечными лучами. Яркость Солнца  $B$   $=$   
 $= 1,2 \cdot 10^9$  кд/м<sup>2</sup>.

## **Тема 2. Геометрическая оптика**

11. Длинное тонкое волокно, выполненное из прозрачного материала с показателем преломления  $n = 1,35$ , образует световод. Определите максимальный угол  $\alpha_{\max}$  к оси световода, под которым световой луч еще может падать на торец, чтобы пройти световод без ослабления.

12. Собирающая линза дает на экране изображение лампы, увеличенное втрое. Если линзу подвинуть на  $l = 32$  см ближе к экрану, то она дает изображение, втрое уменьшенное. Найдите фокусное расстояние линзы.

13. Радиус кривизны выпуклого зеркала  $R = 50$  см. Предмет высотой  $h = 15$  см находится на расстоянии, равном  $a = 1$  м от зеркала. Определите расстояние от зеркала до изображения и его высоту.

14. Узкий пучок параллельных лучей падает на экран под углом  $45^\circ$  и образует светлое пятно. На какое расстояние  $\Delta s$  сместится пятно, если на пути лучей параллельно экрану поставить стеклянную пластинку толщиной в  $d = 1$  см? Показатель преломления стекла  $n$  считать равным 1,5.

15. Луч света падает на грань стеклянной ( $n = 1,5$ ) призмы перпендикулярно к ее поверхности и выходит из противоположной грани, отклонившись на угол  $\delta = 25^\circ$  от первоначального направления. Определите преломляющий угол призмы  $\varphi$ .

16. Преломляющий угол призмы  $\varphi = 60^\circ$ . Угол наименьшего отклонения луча от первоначального направления  $\delta = 30^\circ$ . Определите показатель преломления стекла  $n$ , из которого изготовлена призма.

17. Расстояние между фокусами объектива и окуляра внутри микроскопа  $l = 16$  см. Фокусное расстояние объектива  $f_1 = 4$  мм. С каким фокусным расстоянием  $f_2$  следует взять окуляр, чтобы получить увеличение в 500 раз?

18. Плосковыпуклая линза из стекла ( $n_1 = 1,5$ ) в воздухе обладает оптической силой  $D_1 = 5$  дптр. При ее погружении в жидкость ( $n_2 = 1,7$ ) линза действует как рассеивающая. Определите

фокусное расстояние  $f_2$  и оптическую силу  $D_2$  линзы в жидкости. Где находится изображение точки, расположенной на главной оптической оси и удаленной от линзы на расстояние, равное трем фокусным расстояниям (рассмотреть оба случая).

19. Радиус кривизны вогнутого зеркала  $R = 90$  см. Найдите положение предмета, при котором его изображение будет действительным и в три раза увеличенным. Где должен находиться предмет, чтобы его изображение было мнимым и увеличенным в три раза?

20. Вычислите смещение луча, прошедшего сквозь стеклянную пластинку толщиной  $d$  с показателем преломления  $n$ , если угол падения луча в воздухе равен предельному углу полного внутреннего отражения для стекла, из которого изготовлена пластинка.

### ***Тема 3. Интерференция света***

21. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой находится жидкость. Найдите показатель преломления жидкости  $n$ , если радиус  $r_3$  третьего темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм равен 0,82 мм. Радиус кривизны линзы  $R = 0,6$  м.

22. На тонкую пленку под углом  $\alpha = 30^\circ$  падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Отраженный от нее свет максимально усилен вследствие интерференции. Определите минимальную толщину  $d_{\min}$  пленки, если показатель преломления материала пленки  $n = 1,4$ .

23. Расстояние  $L$  от щелей до экрана в опыте Юнга равно 1 м. Определите расстояние между щелями  $d$ , если на отрезке длиной  $l = 1$  см укладывается  $N = 10$  темных интерференционных полос. Длина волны  $\lambda = 0,7$  мкм.

24. На стеклянную пластину положена выпуклой стороной плосковыпуклая линза. Сверху линза освещена монохроматическим светом длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Найдите радиус  $R$  линзы, если радиус четвертого темного кольца Ньютона в проходящем свете  $r_4 = 2$  мм.

25. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. Интерференция наблюдается в проходящем свете через красное стекло ( $\lambda_1 = 630$  нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом  $l_1 = 3$  мм. Затем эта же



пленка наблюдается через синее стекло ( $\lambda_2 = 435$  нм). Найдите расстояние  $l_2$  между соседними синими полосами. Считайте, что за время измерений форма пленки не изменяется и свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

26. На стеклянную пластину ( $n_1 = 1,5$ ) нанесен тонкий слой прозрачного вещества с показателем преломления  $n_2 = 1,3$ . Пластина освещена параллельным пучком монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 640$  нм, падающим на пластинку нормально. Какую минимальную толщину  $d_{\min}$  должен иметь слой, чтобы отраженный пучок имел наименьшую яркость?

27. На тонкий стеклянный клин падает нормально параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Расстояние между соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете  $l = 0,5$  мм. Определите угол  $\gamma$  между поверхностями клина. Показатель преломления стекла, из которого изготовлен клин,  $n = 1,6$ .

28. Расстояние между двумя когерентными источниками света ( $\lambda = 0,6$  мкм) равно 0,1 мм. Расстояние между светлыми полосами на экране в средней части интерференционной картины равно  $\Delta x = 1$  см. Определите расстояние  $L$  от источников до экрана.

29. Между двумя плоскопараллельными пластинами на расстоянии  $l = 10$  см от границы их соприкосновения находится проволока диаметром  $d = 0,01$  мм, образуя воздушный клин. Пластины освещаются нормально падающим монохроматическим светом ( $\lambda = 0,6$  мкм). Определите ширину  $\Delta x$  интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете.

30. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается нормально падающим монохроматическим светом ( $\lambda = 590$  нм). Радиус кривизны  $R$  линзы равен 5 см. Определите толщину  $d_3$  воздушного промежутка в том месте, где в отраженном свете наблюдается третье темное кольцо.

#### **Тема 4. Дифракция света**

31. На диафрагму с круглым отверстием диаметром  $d = 2$  мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии  $b = 1$  м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в

центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

32. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает под углом скольжения  $\theta = 60^\circ$  на естественную грань монокристалла NaCl ( $M = 58,5 \cdot 10^{-3}$  кг/моль), плотность которого  $\rho = 2,16$  г/см<sup>3</sup>. Определите длину волны рентгеновского излучения, если при отражении от этой грани наблюдается максимум третьего порядка.

33. Расстояние между точечным источником  $S$  и точкой наблюдения  $P$  равно 2 м. В какой точке на отрезке  $SP$  надо поместить диафрагму с круглым отверстием, диаметр которого  $D = 1,8$  мм, чтобы при рассмотрении из точки  $P$  в отверстии укладывалось три зоны Френеля? Длина волны излучаемого света  $\lambda = 0,6$  мкм.

34. На дифракционную решетку, содержащую  $n = 600$  штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определите длину  $l$  спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана  $L = 1,2$  м. Границы видимого спектра:  $\lambda_{кр} = 780$  нм,  $\lambda_{ф} = 400$  нм.

35. На дифракционную решетку, содержащую  $n = 200$  штрихов на 1 мм, падает нормально свет с длиной волны  $\lambda = 610$  нм. Спектральную линию какого наибольшего порядка можно наблюдать с помощью такой решетки? Определите угол отклонения лучей, соответствующий этой линии.

36. На щель шириной  $b = 0,1$  мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние  $L$  от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума  $\Delta x = 1$  см.

37. Угловая дисперсия  $D$  дифракционной решетки для излучения некоторой длины волны (при малых углах дифракции) составляет 1 угл. мин /нм. Определите разрешающую способность  $R$  этой решетки для излучения той же длины волны, если длина решетки  $l = 2$  см.

38. На дифракционную решетку падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 410$  нм). Угол  $\Delta\varphi$  между направлениями на максимумы первого и второго порядков равен  $2^\circ 21'$ . Определите число

$n$  штрихов на 1 мм дифракционной решетки.

39. Какова должна быть наименьшая ширина дифракционной решетки  $l$ , чтобы спектрофотометр с такой решеткой мог разрешить линии дублета натрия с длиной волн  $\lambda_1 = 589,0$  нм и  $\lambda_2 = 589,6$  нм?

40. На дифракционную решетку падает нормально монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран, удаленный от линзы на  $L = 1,2$  м. Расстояние между двумя максимума первого порядка, наблюдаемыми на экране  $l = 20,2$  см. Каково число штрихов  $n$  на 1 мм решетки? Сколько максимумов дает при этом дифракционная решетка?

### ***Тема 5. Поляризация света***

41. Пластинку кварца толщиной  $d = 2$  мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол  $\phi = 53^\circ$ . Какой наименьшей толщины  $d_{\min}$  следует взять пластинку, чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным?

42. Предельный угол полного внутреннего отражения на границе жидкости с воздухом равен  $43^\circ$ . Каков должен быть угол падения луча из воздуха на поверхность жидкости, чтобы отраженный луч был максимально поляризован?

43. Частично поляризованный свет рассматривается через николь (анализатор). При повороте николя на  $\phi = 45^\circ$  по отношению к положению, соответствующему максимальной интенсивности выходящего луча, интенсивность света уменьшается в 3 раза. Определите отношение интенсивностей естественной и поляризованной частей в падающем луче.

44. При прохождении света через трубку длиной  $l_1 = 20$  см, содержащую раствор сахара концентрацией  $c_1 = 10\%$ , плоскость поляризации света повернулась на угол  $\phi_1 = 13,3^\circ$ . В другом растворе сахара, налитом в трубку длиной  $l_2 = 15$  см, плоскость поляризации повернулась на угол  $\phi_2 = 5,2^\circ$ . Определите концентрацию  $c_2$  второго раствора.

45. Пучок естественного света последовательно проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол  $\phi = 30^\circ$ . Принимая, что коэффициент поглощения каждого николя равен 0,1, найдите, во сколько раз пучок света, выходящий из

второго николя, ослаблен по сравнению с пучком, падающим на первый николь.

46. На пути частично поляризованного света со степенью поляризации  $P = 0,6$ , поставили анализатор так, что интенсивность света, прошедшего через него, стала максимальной. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, если плоскость пропускания анализатора повернуть на угол  $\varphi = 60^\circ$ ?

47. Угол  $\varphi$  между плоскостями пропускания поляроидов равен  $50^\circ$ . Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в  $\eta = 9$  раз. Определите коэффициент поглощения света в поляроидах.

48. Свет проходит через систему из двух скрещенных николей, между которыми расположена кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно к оптической оси. Определите минимальную толщину пластинки, при которой свет с длиной волны  $\lambda_1 = 436$  нм будет полностью задерживаться этой системой, а свет с длиной волны  $\lambda_2 = 497$  нм – пропускаться наполовину. Постоянная вращения кварца для этих длин волн равна соответственно  $\alpha_1 = 41,5$  и  $\alpha_2 = 31,1$  угл. град/мм.

49. Какой длины трубку с раствором сахара концентрацией  $c = 80$  г/л надо поместить между двумя параллельными николями, чтобы свет был полностью погашен? Удельная постоянная вращения сахара  $\alpha_0 = 0,67$  град·м<sup>2</sup>/кг.

50. На николь падает пучок частично поляризованного света. При некотором положении николя интенсивность света, прошедшего через него, стала минимальной. Когда плоскость пропускания николя повернули на угол  $\varphi = 45^\circ$ , интенсивность света возросла в  $\eta = 1,5$  раза. Определите степень поляризации  $P$  света.

### ***Тема 6. Тепловое излучение***

51. При открытой дверце печи внутри нее поддерживается температура  $t = 800^\circ\text{C}$ . Размеры дверцы равны: ширина  $a = 22$  см и высота  $b = 15$  см. Определите, сколько энергии  $W$  в единицу времени получает комната от печи через открытую дверцу.

52. Имеется два абсолютно черных источника теплового излучения. Температура одного из них  $t_1 = 2227^\circ\text{C}$ . Найдите температуру  $t_2$  другого источника, если длина волны, отвечающая максимуму его испускательной способности, на  $\Delta\lambda = 0,5$  мкм больше длины волны,

соответствующей максимуму испускательной способности первого источника.

53. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился с  $\lambda_1 = 2,4$  мкм на  $\lambda_2 = 0,8$  мкм. Как и во сколько раз изменились энергетическая светимость тела и максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости?

54. Определите, какая длина волны  $\lambda_{\max}$  соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости, равной  $r_{\lambda,T}^{\max} = 1,5 \cdot 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup>.

55. Металлическая поверхность площадью  $S = 15$  см<sup>2</sup>, нагретая до температуры  $T = 3000$  К, излучает в одну минуту 100 кДж. Определите энергию  $W$ , излучаемую этой поверхностью, считая ее черной и отношение энергетических светимостей  $R_{\lambda}^*/R_{\lambda}$  этой поверхности и черного тела при данной температуре.

56. Черное тело имеет температуру  $T_1 = 500$  К. Какова будет температура  $T_2$  тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в  $n = 5$  раз?

57. Муфельная печь, потребляющая мощность  $P = 1$  кВт, имеет отверстие площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup>. Определите, какая часть  $\eta$  мощности рассеивается стенками печи, если температура ее внутренней поверхности равна  $T = 1$  кК.

58. Определите максимальную спектральную плотность  $r_{\lambda,T}^{\max}$  энергетической светимости, рассчитанную на 1 нм в спектре излучения абсолютно черного тела. Температура тела  $T = 1$  К.

59. Определите, какую мощность  $P$  необходимо подводить к медному шарiku радиусом  $r = 0,01$  м, чтобы при температуре окружающей среды  $T_0 = 260$  К поддерживать его температуру равной  $T = 290$  К. Считать, что тепловые потери обусловлены только излучением, а поглощательную способность меди примите равной  $a_T = 0,6$ .

60. Определите поглощательную способность  $a_T$  серого тела, для которого температура, измеренная радиационным пирометром,  $T_{\text{рад}} = 1,4$  кК, тогда как истинная температура  $T$  тела равна 3,2 кК.

### ***Тема 7. Фотоэффект. Эффект Комптона. Давление света***

61. Пучок света с длиной волны  $\lambda = 0,49$  мкм, падая

перпендикулярно поверхности, производит на нее давление  $p = 5$  мкПа. Определите, сколько фотонов падает каждую секунду на  $S = 1 \text{ м}^2$  этой поверхности. Коэффициент отражения света от данной поверхности  $\rho = 0,25$ .

62. На идеально отражающую поверхность падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$ . Поток излучения  $\Phi_0 = 0,45 \text{ Вт}$ . Определите число фотонов  $N$ , падающих на поверхность за время  $t = 3 \text{ с}$  и силу давления  $F$ , испытываемую этой поверхностью.

63. Найдите световое давление  $p$  на стенки электрической 100-ваттной лампочки, считая, что колба лампочки представляет собой сферический сосуд радиусом  $r = 5 \text{ см}$ . Стенки лампочки отражают  $k_1 = 4\%$  и пропускают  $k_2 = 6\%$  падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

64. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 400 \text{ нм}$ . Определите наименьшее запирающее напряжение  $U_{\text{зап}}^{\text{min}}$ , при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна  $A = 2,2 \text{ эВ}$ .

65. Какой должна быть длина волны  $\lambda$  излучения, падающего на стронций, чтобы при фотоэффекте максимальная кинетическая энергия электронов равнялась  $K_{\text{max}} = 1,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ? Красная граница фотоэффекта для стронция –  $\lambda_0 = 550 \text{ нм}$ .

66. Работа выхода электронов из кадмия равна  $A = 4,08 \text{ эВ}$ . Какой должна быть длина волны  $\lambda$  излучения, падающего на кадмий, чтобы при фотоэффекте максимальная скорость вылетающих электронов составляла  $v_{\text{max}} = 7,2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ ?

67. Определите, какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол, равный  $\theta = 180^\circ$ ? Энергия фотона до рассеяния равна  $E = 0,225 \text{ МэВ}$ .

68. Определите импульс электрона  $m\vec{v}$  отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол, равный  $\theta = 180^\circ$ .

69. В эффекте Комптона фотон рассеялся под углом  $\theta = 120^\circ$  на покоившемся свободном электроне, в результате чего электрон получил кинетическую энергию  $K = 0,45 \text{ МэВ}$ . Найдите энергию фотона  $E$  до рассеяния.

70. Фотон с длиной волны  $\lambda = 5$  пм испытал комптоновское рассеяние под углом  $\theta = 90^\circ$  на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите энергию электрона отдачи К.

71. Давление монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 600$  нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет  $p = 0,1$  мкПа. Определите концентрацию  $n$  фотонов в световом пучке и число фотонов  $N$ , падающих каждую секунду на  $S = 1$  м<sup>2</sup> поверхности.

72. Пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами  $\varphi_1 = 60^\circ$  и  $\varphi_2 = 120^\circ$ , отличаются друг от друга в 2 раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны  $\lambda$  падающего излучения.

73. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн  $\lambda_1 = 0,35$  мкм и  $\lambda_2 = 0,54$  мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2 раза. Найдите работу  $A$  выхода электронов с поверхности этого металла.

74. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить запирающую разность потенциалов  $U_{\text{зап}_1} = 3,7$  В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то запирающую разность потенциалов придется увеличить до  $U_{\text{зап}_2} = 6$  В. Определите работу  $A$  выхода электронов с поверхности этой пластинки.

75. На поверхность площадью  $S = 100$  см<sup>2</sup> ежеминутно падает  $W = 63$  Дж световой энергии. Найдите световое давление  $p$  в случаях, когда поверхность: а) полностью отражает лучи; б) полностью поглощает падающие на нее лучи.

76. Угол рассеяния фотона  $\theta = 90^\circ$ . Угол отдачи электрона  $\varphi = 30^\circ$ . Определите энергию  $E$  падающего фотона.

77. Энергия падающего фотона равна энергии покоя электрона. Сколько процентов энергии падающего фотона остается у рассеянного фотона и сколько процентов получает электрон отдачи, если угол рассеяния  $\theta = 60^\circ$ .

78. Определите импульс  $m\vec{v}$  электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол, равный  $\theta = 180^\circ$ .

79. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол  $\theta = 160^\circ$ ? Энергия фотона до рассеяния равна  $E = 0,35$  МэВ.

80. Фотон с энергией  $E = 1$  МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найдите кинетическую энергию  $K$  электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%.

### ***Тема 8. Атом водорода. Спектр атома водорода***

81. Электрон в атоме водорода находится на втором энергетическом уровне. Определите кинетическую  $K$ , потенциальную  $П$  и полную  $E$  энергию электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

82. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки  $d = 5 \cdot 10^{-4}$  см. С какой орбиты должен перейти электрон на вторую орбиту, чтобы спектральную линию в спектре пятого порядка можно было наблюдать под углом  $\varphi = 41^\circ$ ?

83. Электрон в атоме водорода может находиться на круговых орбитах радиусами  $r_1 = 0,5 \cdot 10^{-8}$  см и  $r_2 = 2 \cdot 10^{-10}$  м. Как относятся угловые скорости вращения электрона на этих орбитах?

84. Определите, с какой частотой  $n_0$  вращается электрон в атоме водорода, находясь на круговой орбите радиусом  $r = 5 \cdot 10^{-11}$  м.

85. Определите наименьшее и наибольшее значения энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

86. Во сколько раз изменится период вращения электрона в атоме водорода, если при переходе в невозбужденное состояние атом излучил фотон с длиной волны  $\lambda = 97,5$  нм?

87. Найдите наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).

88. Радиус орбиты электрона в атоме водорода  $r = 2 \cdot 10^{-10}$  м. Фотоны какой длины волны  $\lambda$  могут вызвать ионизацию этого атома?

89. Определите длину волны  $\lambda$  света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом  $n = 2$ , если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз.



90. Определите первый потенциал возбуждения атома водорода.

### Тема 9. Элементы ядерной физики

91. Какая масса  $m$  урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  расходуется за сутки на атомной электростанции мощностью  $P = 5 \cdot 10^6$  Вт с КПД  $\eta = 17\%$ , если при каждом акте деления выделяется энергия  $\Delta W_1 = 200$  МэВ? Сравните полученный результат с суточным расходом каменного угля тепловой электростанции той же мощности при КПД  $\eta_1 = 75\%$ . Теплотворная способность каменного угля  $q = 2,93 \cdot 10^7$  Дж/кг.

92. Определите, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за пять лет, если за один год оно уменьшилось в 4 раза.

93. Начальная активность радиоактивного препарата изотопа радия  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  равна  $a_0 = 3,7 \cdot 10^{10}$  Бк. Определите период полураспада  $T_{1/2}$  этого изотопа, если масса препарата  $m = 1$  г.

94. На сколько процентов снизится активность радиоактивного препарата изотопа иридия  ${}^{192}_{77}\text{Ir}$  за время  $t = 30$  суток? Период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа иридия равен 75 суток.

95. Определите число  $N$  ядер, распадающихся в течение времени  $t = 20$  мин в радиоактивном препарате изотопа фосфора  ${}^{32}_{15}\text{P}$  массой  $m = 1$  мг. Период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа фосфора  ${}^{32}_{15}\text{P}$  равен 14,3 суток.

96. Какое количество энергии  $W$  выделяется в результате термоядерной реакции синтеза  $m = 1$  г гелия из дейтерия и трития?  
 $m({}^2_1\text{H}) = 2,01474$  а. е. м.,  $m({}^3_1\text{H}) = 3,01700$  а. е. м.,  $m({}^4_2\text{He}) = 4,00387$  а. е. м.,  
 $m_n = 1,00899$  а. е. м.

97. Определите электрическую мощность  $P$  атомной электростанции, расходующей в сутки  $m = 220$  г урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  и имеющей КПД  $\eta = 25\%$ , если известно, что при делении одного ядра урана выделяется энергия  $E_0 = 3,2 \cdot 10^{-11}$  Дж.

98. При бомбардировке изотопа алюминия  ${}^{27}_{13}\text{Al}$   $\alpha$ -частицами получается радиоактивный изотоп фосфора  ${}^{30}_{15}\text{P}$ , который затем распадается с выделением позитрона. Напишите уравнения обеих

реакций. Найдите удельную активность радиоактивного препарата изотопа  $^{30}_{15}\text{P}$ , если его период полураспада  $T_{1/2} = 130$  с.

99. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада  $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$ . Определите, через какое время распадется 75% первоначальной массы атомов.

100. Найдите постоянную распада  $\lambda$  и среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного кобальта  $^{55}\text{Co}$ , если его активность уменьшается на 4% за один час.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М. и др. Курс физики: В 3 т. – М., 1987, 1989, 2003.
2. Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 т. – М.: Наука, 1987, 1989. – Т. 1, 2, 3.
3. Наркевич И. И., Волмянский Э. И., Лобко С. И. Физика для ВТУЗов. – Мн.: Вышэйшая школа, 1992, 1994. – Т. 1, 2.
4. Наркевич И. И., Волмянский Э. И., Лобко С. И. Физика. – Мн.: Новое знание, 2004.
5. Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1985.
6. Трофимова Т. И. Сборник задач по курсу физики. – М. Высшая школа, 1999.
7. Сидорик В. В., Джилаварди И. З. Физика в компьютерных моделях. – Мн.: Пион, 1998.

### Дополнительная

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1989.
2. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1998, 2003.
3. Джанколи Д. Физика. – М.: Мир, 1989. – Т. 1, 2.
4. Иродов И. Б. Задачи по общей физике. – М.: Наука, 1979.
5. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – М.: Наука, 1988.
6. Мурзов В. И., Коненко А. Ф., Филиппова Л. Г. Общая физика в задачах и решениях. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>МЕХАНИКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1</b> .....	8
1.1. Содержание учебной программы по разделу «Физические основы механики» (для инженерно-технических специальностей) .....	8
.....	
1.2. Содержание учебной программы по разделу «Механика классическая, релятивистская и квантовая» (физические основы механики (для химико-технологических специальностей) ..	10
1.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения .....	13
1.4. Примеры решения задач .....	28
1.5. Задачи к контрольной работе № 1 .....	41
<b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2</b> .....	56
2.1. Содержание учебной программы по разделу «Основы молекулярной физики и термодинамики» (для инженерно-технических специальностей) .....	56
.....	
2.2. Содержание учебной программы по разделу «Основы термодинамики и молекулярной физики» (для химико-технологических специальностей) .....	57
.....	
2.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения .....	59
2.4. Примеры решения задач .....	63
2.5. Задачи к контрольной работе № 2 .....	73
<b>ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ТОК. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3</b> .....	85
.....	
3.1. Содержание учебной программы по разделу «Стационарное электрическое поле» (для инженерно-технических специальностей) .....	85
.....	
3.2. Содержание учебной программы по разделу «Электричество» (для химико-технологических специальностей) .....	86
3.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения .....	87

3.4. Примеры решения задач . . . . .	92
3.5. Задачи к контрольной работе № 3 . . . . .	109
<b>МАГНЕТИЗМ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 . . . . .</b>	<b>123</b>
4.1. Содержание учебной программы по разделу «Электромагнетизм» (для инженерно-технических специальностей) . . . . .	123
4.2. Содержание учебной программы по разделу «Магнетизм» (для химико-технологических специальностей) . . . . .	124
4.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения . . . . .	126
4.4. Примеры решения задач . . . . .	133
4.5. Задачи к контрольной работе № 4 . . . . .	145
<b>ОПТИКА. СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5 . . . . .</b>	<b>161</b>
...	
5.1. Содержание учебной программы по разделам «Оптика», «Строение и физические свойства вещества» (для инженерно- технических специальностей) . . . . .	161
5.2. Содержание учебной программы по разделам «Оптика геометрическая, волновая и квантовая», «Строение и свойства вещества» «Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц» (для химико-технологических специальностей) . . . . .	163
5.3. Основные понятия, формулы, законы и уравнения . . . . .	167
5.4. Примеры решения задач . . . . .	177
5.5. Задачи к контрольной работе № 5 . . . . .	190
<b>ЛИТЕРАТУРА . . . . .</b>	<b>203</b>